FORELESNING 25

MET 1180 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, MAR 16 2016

BI

Plan:

1. Funksjoner i to variable og deres grafer
2. ~~Funksjoner i flere variable~~ ← (neste gang)
3. Partiell derivasjon

Pensum:

[S] 8.1–8.3

[E] 7.1

Eksamen:

MET11801	–	kontrollprøve	frist i morgen
MET11802	–	flervalgs eksamen	02. mai
MET11803	–	avsluttende eksamen	03. juni

1. Funksjoner i to variable

Eks: $f(x,y) = \underline{xy + y^2}$ ← funksjonsuttrykk i to variable (x,y)

Definisjonsområde:

D_f = mengden av alle tallpar (x,y) som vi kan sette inn i funksjonen f.

$f(x,y) = xy + y^2$ Polynom av grad 2

$D_f = \{(x,y) : x,y \text{ reelle tall}\}$

$= \mathbb{R}^2$ (to-dim rom)

Funksjonsverdier:

$f(x,y) = xy + y^2$

(x,y) : inputs

z : output

$x=0, y=0$

$f(0,0) = 0 \cdot 0 + 0^2 = \underline{0}$

$f(1,1) = 1 \cdot 1 + 1^2 = \underline{2}$

$f(1,-1) = 1 \cdot (-1) + (-1)^2 = \underline{0}$

$x=1, y=-1$

$z = f(x,y) = xy + y^2$

Grafen til f er 3-dim.

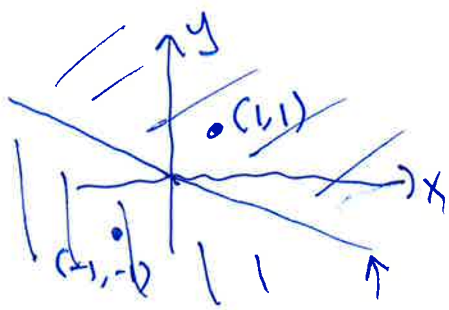
Defn: En funksjon f i to variable (x,y) er en regel som tilordner en entydig verdi til hvert tallpar (x,y) i D_f.
D_f er en delmengde av $\mathbb{R}^2$.

Eks:

i) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+2y}$ $\quad D_f = \{(x,y) : x+2y \neq 0\}$

Eks: $f(1,1) = \underline{\frac{1}{3}}$

$f(-1,-1) = \underline{-\frac{1}{3}}$



$x + 2y = 0$

$2y = -x$

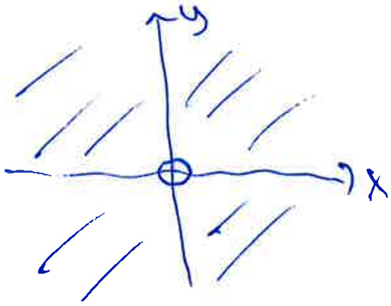
$y = -\frac{1}{2}x$

2) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$D_f = \{(x,y) : x^2+y^2 > 0\}$

$= \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$

Husk:
$\ln(x)$ er defn.
for $x > 0$

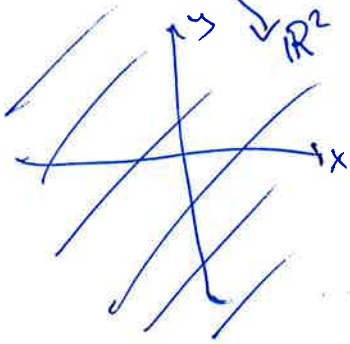


$f(1,1) = \ln(2)$
$f(1,-1) = \ln(2)$

3) $f(x,y) = xy e^{x+y}$

$D_f = \mathbb{R}^2$ (alle tall per (x,y))

$f(1,-1) = 1 \cdot (-1) \cdot e^{1+(-1)}$
$= -1 \cdot e^0 = \underline{-1}$



Funksjonstyper:

a) **Polynomer av grad 1:**

$f(x,y) = ax + by + c$ $\quad$ (a,b,c konstanter)

b) **Polynomer av grad 2:**

$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

(a,b,c,d,e,f konstanter)

Eks: $f(x,y) = 2x + 3y - 1$ $\quad$ poly grad 1
$f(x,y) = xy + y^2$ $\quad$ poly grad 2

c) Polynomer av høyere grad

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^3 - x + 1$ grad 3

$f(x,y) = 3x^2y - x^2$ "

d) Rasjonale funksjoner

Eks: $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $D_f = \{(x,y) : x^2+y^2 \neq 0\}$
$= \{(x,y) : (x,y) \neq (0,0)\}$

Polynomer er definert på hele $\mathbb{R}^2$, rasjonale funksjoner er definert der nevner $\neq 0$.

e) Cobb-Douglas funksjoner:

Defn: En Cobb-Douglas funksjon har formen

$$f(x,y) = C \cdot x^a y^b \quad , \quad D_f = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$$

der C, a, b er konstanter.

Eks: $f(x,y) = 100 \cdot x^{1,25} y^{-0,25} = 100\, x^{5/4} y^{-1/4}$

$= 100 \cdot \sqrt[4]{x^5} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$

$= 100 \frac{\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[4]{y}}$ ← D_f:

$x^5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$y > 0$

Eks: (Frisch - Haavelmoe)

$$x = A \cdot \frac{m^{2,08}}{p^{1,5}} \qquad (A \text{ positiv konstant})$$

x: melke-forbruk

p: relativ pris på melk

m: inntekten til en husholdning

$$x = f(p,m) = A \cdot p^{-1,5} \cdot m^{2,08}$$

Cobb-Douglas funksjon.

$f(x,y) = C \cdot x^a y^b$:

$$z = C \cdot x^a y^b$$

$$\ln(z) = \ln(C \cdot x^a y^b)$$
$$= \ln C + \ln(x^a) + \ln(y^b)$$
$$\boxed{\ln z = \ln C + a \cdot \ln x + b \cdot \ln y}$$

Grafer:

Defn: Hvis $f(x,y)$ er en funksjon i ~~to~~ to variable med defn. område D_f, så er grafen til f mengden av alle tripler

$$(x,y,z)$$

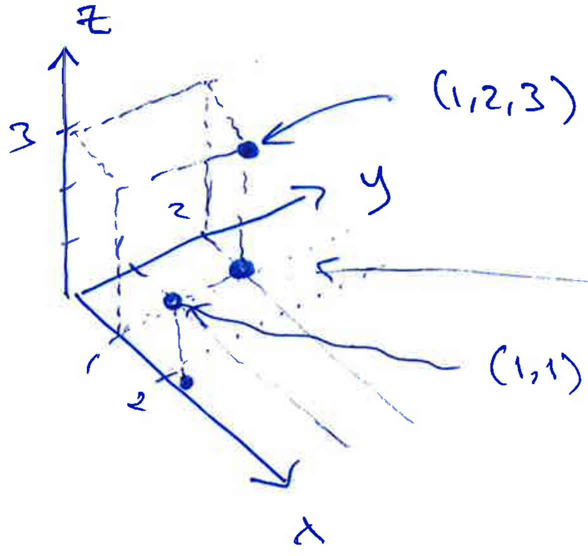
der (x,y) er i D_f og $z = f(x,y)$.

Vi tegner grafen til f i et tre-dimensjonalt koordinatsystem med xyz-akser. Det blir en to-dimensjonal flate i 3-rommet.

Koordinatsystem:

Eks: $(1,2,3)$

$x=1,\ y=2,\ z=3$



Grafen:

$f(x,y) = xy + y^2 - 3$

$D_f = \mathbb{R}^2$ (alle pkt i xy-planet)

$(x,y) = (1,2)$

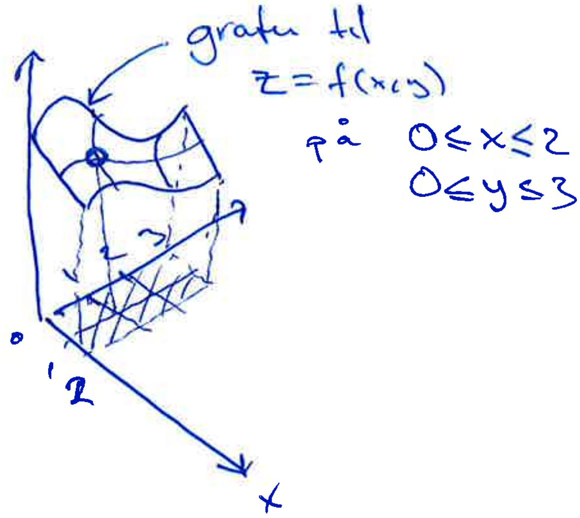
$f(1,2) = 1\cdot 2 + 2^2 - 3$

$= 6 - 3 = \underline{3}$

$(x,y) = (1,2)$: $z = f(1,2) = 3 \to (1,2,3)$ på grafen til f.

$(x,y) = (1,1)$: $z = f(1,1) = -1 \to (1,1,-1)$

$\vdots$

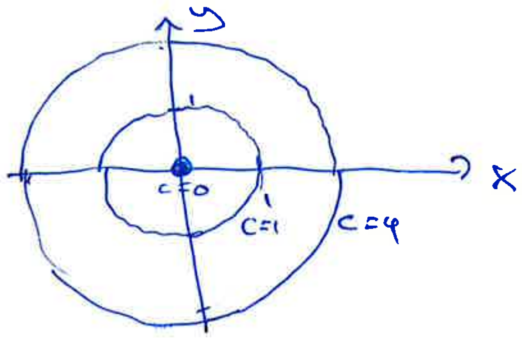


Nivåkurver:

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$

Nivåkurve for f: $f(x,y) = c$

$x^2+y^2 = c$

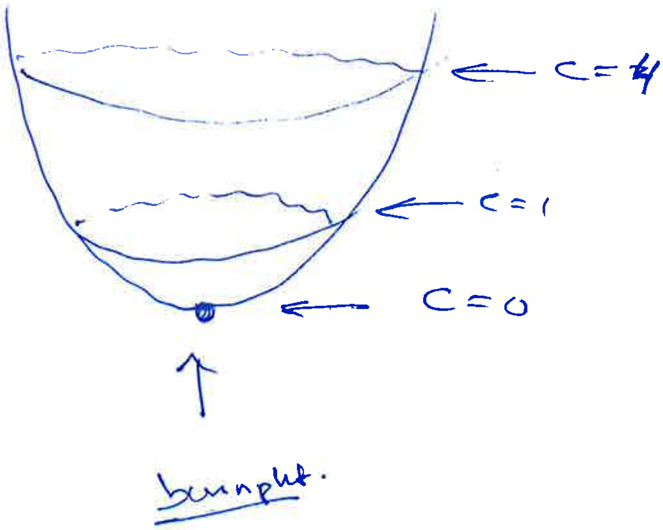


$c=1$: $x^2+y^2=1$

$c=4$: $x^2+y^2=4$

$c=0$: $x^2+y^2=0$

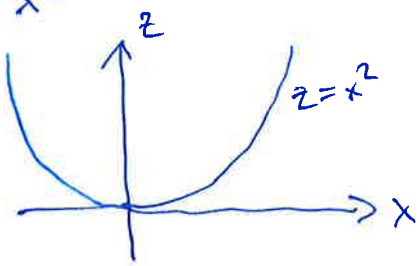
$c=-1$: $x^2+y^2=-1$
ingen pkt.



Utsnitt: $y=0$

$z = f(x,y) = x^2+y^2 = x^2$

$z = x^2$



② Partiell derivasjon.

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$(x,y) = (1,1)$: $f(1,1) = 2$

Én var:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$(1,1) \swarrow \quad \searrow$$

$(1+h,1)$ $\qquad$ $(1,1+h)$

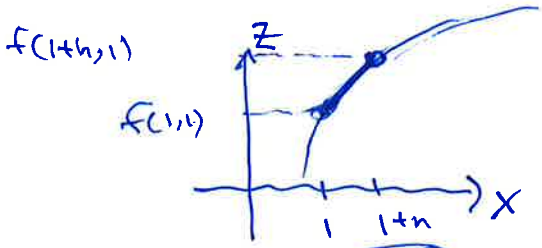
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} \qquad\qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(1,1+h) - f(1,1)}{h}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

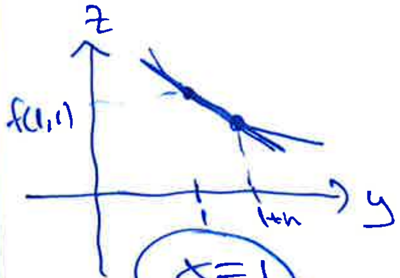
$$f'_x(1,1) \qquad\qquad\qquad f'_y(1,1)$$

$\Delta x = (1+h) - 1 = h$ $\qquad$ $\Delta y = (1+h) - 1 = h$

$\Delta z = f(1+h,1) - f(1,1)$ $\qquad$ $\Delta z = f(1,1+h) - f(1,1)$



utsnitt (y=1).



x=1

Utregning:

$$f'_x(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)^2 + \cancel{1^2}] - [1^2 + \cancel{1^2}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0} (2+h) = \underline{2}$$

f'_x : partiell derivasjon m.h.t. x
(y er konstant)

$$f = x^2 + y^2 \Rightarrow f'_x = 2x + 0 = \underline{\underline{2x}}$$

f'_y : partiell derivasjon m.h.t. y
(x er konstant)

$$f = x^2 + y^2 \Rightarrow f'_y = 0 + 2y = \underline{\underline{2y}}$$

Eks: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f'_x = \underline{2x}$ $\quad f'_y = \underline{2y}$

$(x,y) = (1,1)$: $\quad f'_x(1,1) = 2$
$\quad f'_y(1,1) = 2$

$(x,y) = (0,1)$: $\quad f'_x(0,1) = 0$
$\quad f'_y(0,1) = 2$

Eks: $f(x,y) = xy + y^2$

$$f'_x = (y\cdot x)'_x + (y^2)'_x = y + 0 = \underline{y}$$

$$f'_y = (xy)'_y + (y^2)'_y = x\cdot 1 + 2y = \underline{x+2y}$$

Ex:

i) $f = x^2y - y^3 + 2x - 1$

ii) $f = xe^{xy} - ye^x$

iii) $f = \ln(x+y)$

i) $f'_x = 2x \cdot y + 2 = \underline{2xy + 2}$

$f'_y = x^2 \cdot 1 - 3y^2 = \underline{x^2 - 3y^2}$

ii) $f'_x = 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot (xy)'_x - y \cdot e^x$

$= \underline{e^{xy} + xye^{xy} - ye^x}$

$f'_y = x \cdot e^{xy} \cdot x - e^x \cdot 1 = \underline{x^2e^{xy} - e^x}$

iii) $f'_x = \frac{1}{x+y} \cdot (x+y)'_x = \underline{\frac{1}{x+y}}$

$f'_y = \frac{1}{x+y} \cdot (x+y)'_y = \underline{\frac{1}{x+y}}$

BI