FORELESNING 27

MET1180 BI

EIVIND ERIKSEN, APR 06 2016

MATEMATIKK

Plan:

1. Optimering uten bibetingelser
2. Linearisering
3. Tangenter til nivåkurver

Pensum:

[S] 8.9 – 8.10

[E] 7.4 – 7.5

① Optimering uten bibetingelser (i to variable)

max / min $f(x,y)$ { ingen begrensninger på punktene (x,y) som vi kan bruke

Eks:

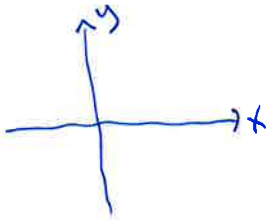
$$\max \ f(x,y) = 2x - x^2 - x^3y^2$$

Tillatte punkter: Alle (x,y) i $\mathbb{R}^2$

Metode:

① Finner kandidatpunkter:

- Stasjonære pkt: $\boxed{f'_x = f'_y = 0}$ førsteordens bet. (FOC)
- Kritiske pkt som ikke er stasjonære: f'_x eller f'_y eksisterer ikke



(ingen randpunkt i slike problemer)

② Klassifisere kandidatpunkter

$\begin{cases} \text{lokalt maks} \\ \text{lokalt min} \\ \text{Sadelpunkt} \end{cases}$

BI

(x^*, y^*) stasjonært pkt $\longrightarrow$ Annenderivert-testen

$$H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x^*,y^*) & f''_{xy}(x^*,y^*) \\ f''_{yx}(x^*,y^*) & f''_{yy}(x^*,y^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$D = AC - B^2$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} D>0,\ A>0: & \text{lokalt min} \\ D>0,\ A<0: & \text{lokalt maks} \\ D<0: & \text{Sadelpunkt} \end{array}}$$

$D=0$: ingen konklusjon fra annenderivert-testen

$\left.\begin{array}{l}(x^*,y^*) \text{ er kritisk punkt} \\ \text{så ikke er stasjonært}\end{array}\right\}$ kan ikke bruke annenderivert-testen.

③ Avgjør om noen av lokale maks er globalt maks

lokale min er globale min

Eks: $\max\ f(x,y) = 2x - x^2 - x^3y^2$

① Kondidatpunkter: (FOC) $f'_x = f'_y = 0$

$$f'_x = 2 - 2x - 3x^2y^2 = 0 \qquad (1)$$

$$f'_y = -2x^3y = 0 \qquad (2)$$

(2): $-2x^3y = 0$

$\cancel{x=0}$ eller $y=0$

(1): $x=0$: $2 - 0 - 0 = 0$

Ingen løsning.

$y=0$: $2 - 2x - 0 = 0$

$2 - 2x = 0$

$x = 1$

Stasjonære pkt: $(x,y) = (1,0)$

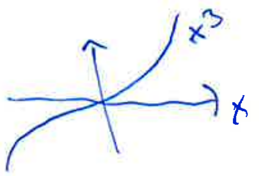
Ingen flere kritiske pkt

② Klassifisere $(x,y) = (1,0)$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} -2-6xy^2 & -6x^2y \\ -6x^2y & -2x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(1,0) = \begin{array}{cc} A & B \\ \| & \| \\ \left(\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{array}\right) & \\ & \| \\ & C \end{array}$$

$D = 4 > 0$, $A = -2 < 0$ } $(1,0)$ er lokalt maks.

③ Konklusjon: Er $(1,0)$ globalt maks? Nei.



$f(1,0) = 1$

ikke global maks.

$f(x,y) = 2x - x^2 - x^3y^2$

$y=1$: $f(x,1) = 2x - x^2 - x^3 \to \infty$

når $x \to -\infty$ $(-x^3 \to \infty)$

$f(-10,1) = 1000 - 100 - 20 = 880$ ✓

Det fins ikke noe maks.

Eks: max/min $f(x,y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$

① Kandidatpunkt:

$f'_x = 12x^3 + 6xy = 0$

$f'_y = 3x^2 - 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3y^2$

$x^2 = y^2$

$\underline{x = y}$ eller $\underline{x = -y}$

$\underline{x=y}$: $12x^3 + 6x^2 = 0$

$6x^2(2x+1) = 0$

$\underline{x = 0}$ eller $\underline{x = -1/2}$

$\underline{y = 0}$ $\quad$ $\underline{y = -1/2}$

$\underline{x=-y}$: $12x^3 - 6x^2 = 0$

$6x^2(2x-1) = 0$

$\underline{x = 0}$ eller $\underline{x = 1/2}$

$\underline{y = 0}$ $\quad$ $\underline{y = -1/2}$

Stasjonære pkt:

$(x,y) = (0,0),\ (-1/2,-1/2),\ (1/2,-1/2)$

Andre kritiske pkt:

Ingen

② Klassifikasjon

$$H(f) = \begin{pmatrix} 36x^2 + 6y & 6x \\ 6x & -6y \end{pmatrix} \Rightarrow H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = 0$ → ingen konklusjon

$(x,y) = (0,0)$:

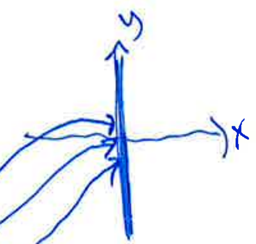
$f(0,0) = 0$

$\underline{x=0}$: $f(0,y) = -y^3$

$y > 0$: $f < 0$

$y = 0$: $f = 0$

$y < 0$: $f > 0$



Sadelpkt.

$$H(f)(-1/2,-1/2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$D = 9 > 0,\ A = 6 > 0$ → lokalt min

$$H(f)(1/2,-1/2) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$D = 9 > 0,\ A = 6 > 0$ → lokalt min

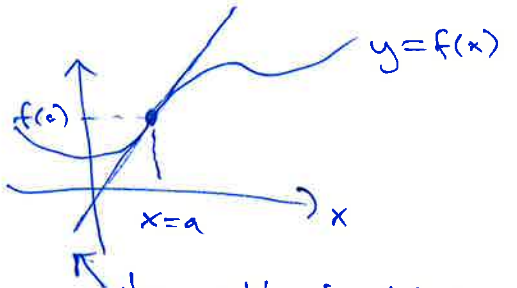
② Linearisering.

(Lineær approksimasjon, Taylor-polynom av grad 1)

Formel for linearisering av $f(x,y)$ i $(x,y)=(a,b)$:

$$\boxed{L(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)\cdot(x-a) + f'_y(a,b)\cdot(y-b)}$$

En variabel



tangentlinjen til f i $x=a$

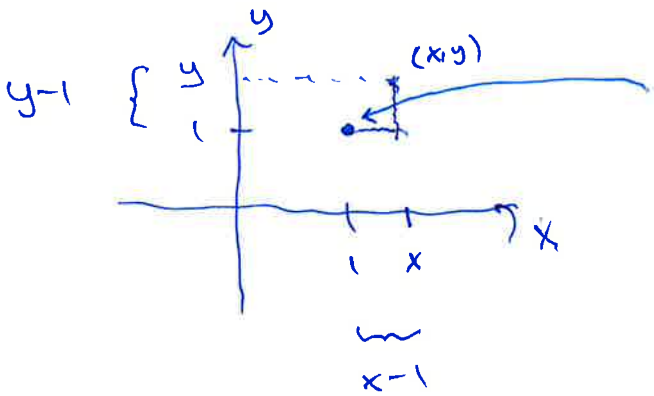
$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$$

$$\boxed{L(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a)}$$

(linearisering til f i $x=a$)

Eks: $f(x,y) = x^2y^3 - x^4 + 2y^2$ i punktet $(1,1)$:



$$f(1,1) = 1 - 1 + 2 = \underline{2}$$

$$f'_x = 2xy^3 - 4x^3 \Rightarrow f'_x(1,1) = \underline{-2}$$

$$f'_y = 3x^2y^2 + 4y \Rightarrow f'_y(1,1) = \underline{7}$$

$$L(x,y) = f(1,1) + f'_x(1,1)\cdot(x-1) + f'_y(1,1)\cdot(y-1)$$

$$= 2 + (-2)\cdot(x-1) + 7(y-1)$$

$$= \underline{2 - 2(x-1) + 7(y-1)}$$

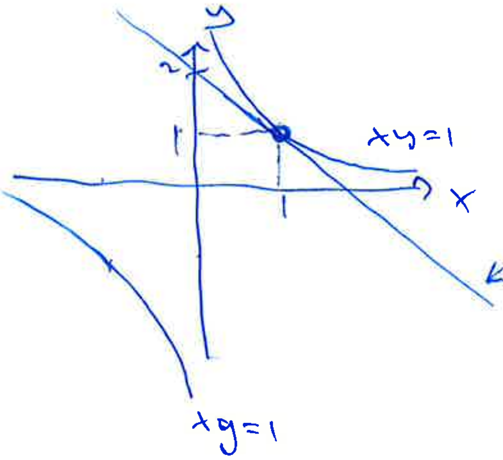
$$= 2 - 2x + 2 + 7y - 7 = \underline{-3 - 2x + 7y}$$

$$f(1.1,\ 0.9) \simeq L(1.1,\ 0.9) = 2 - 2\cdot 0.1 + 7\cdot(-0.1)$$

$$= 2 - 0.2 - 0.7 = \underline{\underline{1.1}}$$

(3) Tangenter til nivåkurver, implisitt derivasjon, totalderivert.

Eks: $f(x,y) = xy = h$ nivåkurve for $f(x,y)$ i høyde h



$h=1$: $xy=1 \Rightarrow y = 1/x$

$y' = -1/x^2$

Tangentlinjen til $xy=1$ i punktet $(1,1)$.

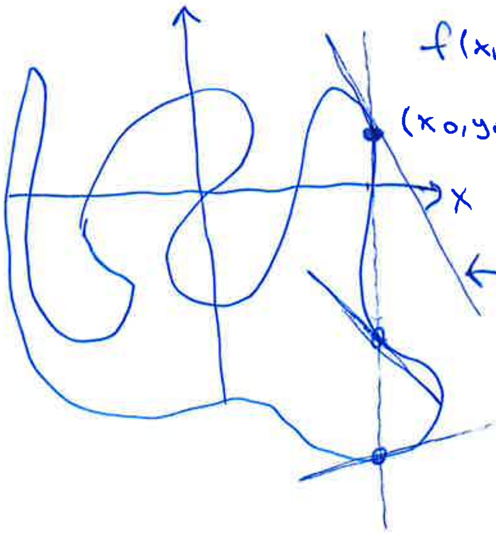
$$\boxed{y-1 = y'(1,1)\cdot(x-1)}$$

$$y-1 = -\frac{1}{1^2}\cdot(x-1)$$

$$\boxed{y=-x+2}$$

Nivåkurven $f(x,y)=h$: punktet (x_0,y_0) har ~~tangent~~ gitt ved

$$\boxed{y-y_0 = y'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)}$$



Stigningstall $y'(x_0,y_0)$

* $y'(x_0,y_0)$ avhenger av (x_0,y_0)
* det er ikke alltid mulig å løse $f(x,y)=h$ for y $\rightarrow$ implisitt derivasjon

Implisitt derivasjon:

BI

$xy = 1$ ⟵ tenker at $y = y(x) = 1/x$

$(xy)'_x = (1)'_x$

$\underbrace{1 \cdot y}_{f'_x} + \underbrace{x \cdot y'}_{f'_y} = 0 \Rightarrow \frac{x \cdot y'}{x} = \frac{-y}{x} \Rightarrow y' = -y/x$

$y'(x,y) = -\frac{y}{x}$

$\left(y = \frac{1}{x}: \quad y' = -\frac{1/x}{x} = -1/x^2 \right)$

Sammenheng mellom implisitt derivasjon og partiellderivasjon:

Implisitt derivasjon av $f(x,y) = h$ gir:

$$\boxed{f'_x + f'_y \cdot y' = 0} \Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Eks: $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ $\quad f(x,y) = 0$

Tangenten til nivåkurven i $x = -1$:

$x^3 + xy + y^2 = 0$

$x = -1$: $\quad -1 + (-y) + y^2 = 0$

$y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

x_0, y_0

$\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$f = x^3 + xy + y^2 = 0 \longrightarrow$ Ønsker å finne $\underline{y'(x,y)}$.

<u>Implisitt derivasjon:</u>

$$(x^3 + xy + y^2)'_x = 0$$

$$f'_x + f'_y \cdot y' = 0 \Rightarrow f'_y \cdot y' = -f'_x \Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$\underbrace{(3x^2 + y)}_{f'_x} + \underbrace{(x + 2y)}_{f'_y} \cdot y' = 0$$

$$\frac{(x+2y) \cdot y'}{(x+2y)} = -\frac{(3x^2+y)}{(x+2y)}$$

$$\underline{y'(x,y) = -\frac{3x^2+y}{x+2y}}$$

$$(x_0, y_0) = \left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) : \quad y' = -\frac{\left(3 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot 2}{\left(-1 + \cancel{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{2}}\right)\right) \cdot 2}$$

$$= -\frac{6 + 1 + \sqrt{5}}{\cancel{-2} + \cancel{2} + 2\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{7+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

<u>Tangent:</u>

$$\boxed{y - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{7+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot (x+1)}$$

Fortsetter med dette eksempelet og totaldiverert neste gang.