FORELESNING 28

MET1180

BI

EIVIND ERIKSEN, APR 13 2016

MATEMATIKK

Plan:

① Totaldrivert (fortsatt fra forrige gang)

② Optimering med bibetingelser.

Pensum:

[S] 8.8, 8.4

[E] 7.5–7.6

---

① Total derivert – tangenter til nivåkurver

Eks: $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$

Nivåkurve: $f(x,y) = 0$

$$\underline{x^3 + xy + y^2 = 0}$$

Ønsker å finne tangenter. – må finne $y'(x,y)$.

Implisitt derivasjon:

$$(x^3 + xy + y^2)'_x = (0)'_x$$

$$3x^2 + (xy)'_x + 2y \cdot y' = 0$$

$$3x^2 + 1 \cdot y + x \cdot y' + 2y \cdot y' = 0$$

$$(3x^2 + y) + (x + 2y) \cdot y' = 0$$

$$\frac{(x+2y) \cdot y'}{x+2y} = \frac{-(3x^2 + y)}{x+2y}$$

$$\boxed{y' = -\frac{3x^2 + y}{x+2y}}$$

Ved hjelp av de partiell deriverte:

$$f(x,y) = \underline{x^3 + xy + y^2} = 0$$

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\overbrace{f'_x + f'_y \cdot y'}$$ $$= 0$$ ← formel for total derivasjon av f m.h.p. x.

$$(3x^2 + y) + (x + 2y)\cdot y' = 0$$

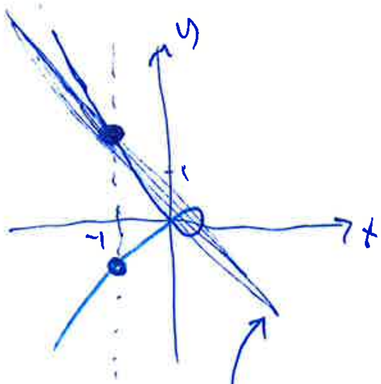
$$y' = -\frac{3x^2+y}{x+2y}$$

Formel: Nivåkurven $f(x,y) = h$ har derivert

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

siden $\frac{d f(x,y)}{dx} = f'_x + f'_y \cdot y'$

Eks: $f(x,y) = x^3 + xy + y^2 = 0$



$\underline{x = -1}$: $(-1)^3 + (-1)\cdot y + y^2 = 0$

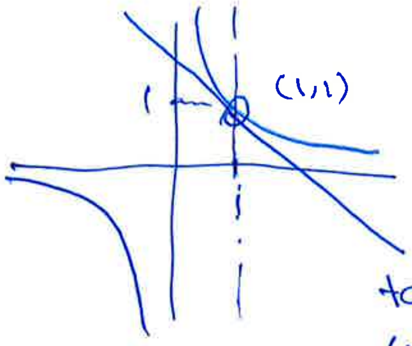
$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.6 \qquad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0.6$$

$x = -1,\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\quad y'\left(-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{\left(3 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot 2}{\cancel{-1} + \cancel{1} + \sqrt{5}\cdot 2} = -\frac{7+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Eks: $f(x,y) = xy = 1 \Rightarrow y = 1/x$



$x=1$: $1 \cdot y = 1 \Rightarrow y = 1$

tangent i $(x,y) = (1,1)$

Stign.tall til tangent:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{y}{x}$$

$$y'(1,1) = -\frac{1}{1} = \underline{-1}$$

$y = 1/x$

$y' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = \underline{-1/x^2}$

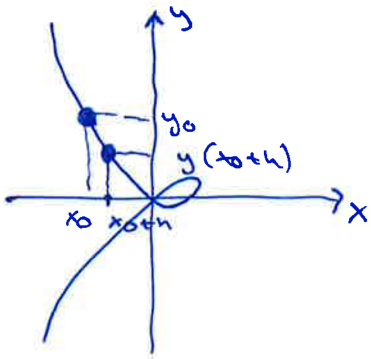
$y'(1) = -\frac{1}{1^2} = \underline{-1}$

Total derivert.

$\frac{df(x,y)}{dx}$ $\leftarrow$ rett d betyr totalderivert

ikke partiell derivert

$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x \right)$



$f(x,y) = h$

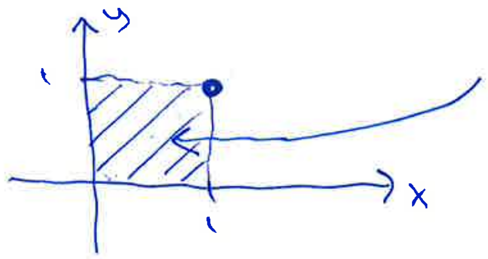
$(x_0, y_0) \rightsquigarrow (x_0+h, y(x_0+h))$

$$\frac{df}{dx}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y(x_0+h)) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \underline{f'_x(x_0,y_0) + f'_y(x_0,y_0) \cdot y'(x_0,y_0)}$$

② Optimering med bibetingelser

Eks: max $f(x,y) = e^{x+y}$ når $0 \le x,y \le 1$



Tillatte punkter:

Punktene som oppfyller bibetingelsene

$0 \le x \quad 0 \le y \quad x \le 1 \quad y \le 1$

Hva er den største verdien til $f(x,y) = e^{x+y}$ blant de tillatte punktene.

Løsningen av problemet avhenger av $f(x,y)$ og bibetingelsene.

Husk:

Optimering uten bibetingelser

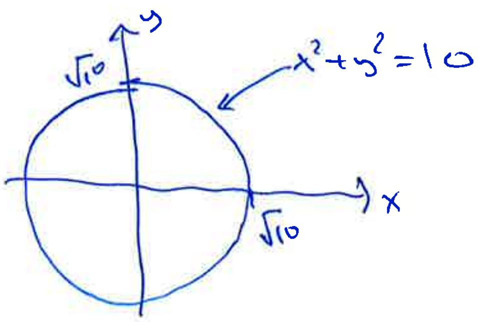
max/min $f(x,y)$

blant alle punkter (x,y).

→ $f'_x = f'_y = 0$

→ klassifikasjon vha $H(f)$

Eks: max $f(x,y) = x + 3y$ når $x^2 + y^2 = 10$



Tillatte punkter:

Punktene som oppfyller bibetingelsene

$x^2 + y^2 = 10$

= punktene på sirkelen

Lagrange-problem: Bibetingelsene er likninger

max / min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$

Eks: max $\underbrace{x+3y}_{f(x,y)}$ når $\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = \underbrace{10}_{a}$

$$\left(\underbrace{x^2+y^2-10}_{g(x,y)} = \underbrace{0}_{a} \right)$$

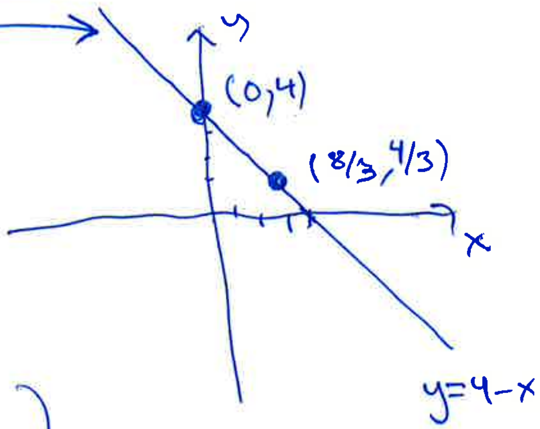
Eks: min $\underbrace{x^2y}_{f(x,y)}$ når $\underbrace{x+y}_{g(x,y)} = \underbrace{4}_{a}$

Enkel løsningsmetode:

min $f(x,y) = x^2y$ når $\boxed{x+y=4}$

Tillatte punkt: $x+y=4$

$y = 4-x$



Blant tillatte punkt: $y = 4-x$

$f = x^2y = x^2\cdot(4-x) = \underline{4x^2-x^3}$

$f'_x = 8x-3x^2 = 0$

$x\cdot(8-3x) = 0$

$\underline{x=0}$ $\quad \underline{x=8/3}$ kandidater for min

$x\to\infty$ gir $f = 4x^2-x^3 \to -\infty$

Konklusjon:

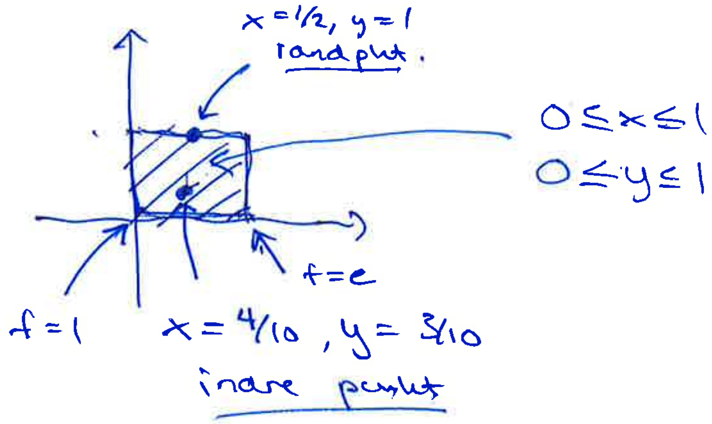
Ingen løsning

Kuhn-Tucker problemer:

Bibetingelsene er lukkede ulikheter $(\leq, \geq)$

Eks: max $f(x,y) = e^{x+y}$ når $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$

$(0 \leq x,y \leq 1)$



Løsning: Enten randpkt eller indre pkt.

Kandidater:

Indre punkt: $f'_x = f'_y = 0$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= e^{x+y} \cdot 1 = 0 \\ f'_y &= e^{x+y} \cdot 1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ingen løsning.}$$

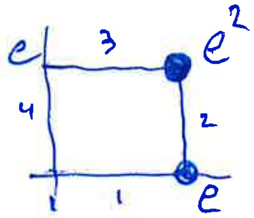
Ingen kandidater til max blant indre punkt.

Randpunkt:

(1) $y = 0,\ 0 \leq x \leq 1$: $f = e^{x+0} = e^x$

$(e^x)'_x = e^x > 0$

$x = 1, y = 0$: $f = e$



Konkl: $f = e^2$ i $(x,y) = (1,1)$ er største verdi blant randpkt.

(2) $x = 1,\ 0 \leq y \leq 1$: $f = e^{1+y}$

$(e^{1+y})'_y = e^{1+y} > 0$

$x = 1, y = 1$: $f = e^2$

(3) (4) på samme måte.

Første kandidat for max er $(x,y)=(1,1)$ med funksjonsverdi $f(1,1)=e^2$.

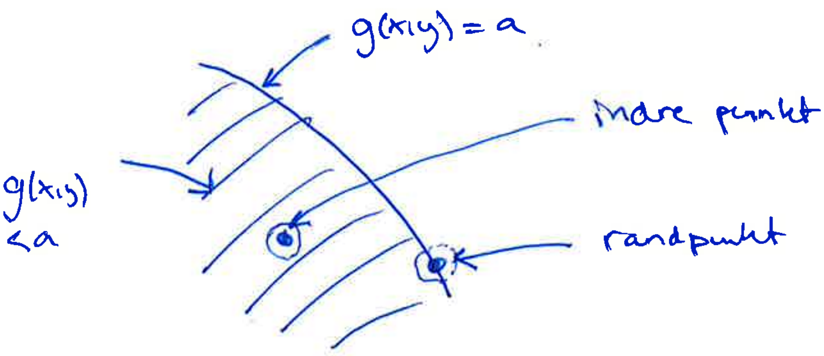
Ekstremverdisetningen:

En kontinuerlig funksjon f definert på et lukket og begrenset område D har en maksimums- og en minimumsverdi.

Defn:

De tillatte punkten er punktene som oppfyller alle bibetingelser. Det tillatte området D er mengden av tillatte punkter.

Et punkt (x,y) i D er et indre punkt hvis alle punkt i nærheten er tillatte, og det er et randpunkt ellers.

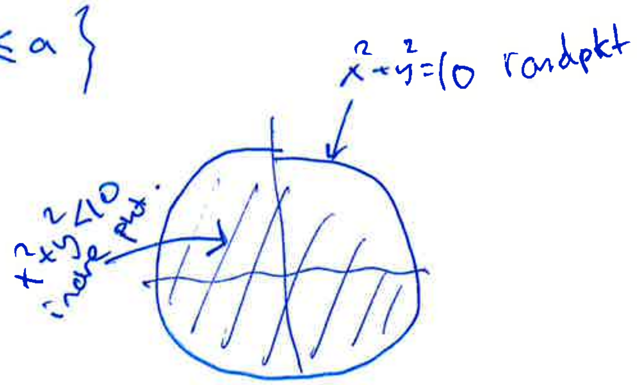


$=$ ← randpkt

$<$ ← indre pkt.

$$D=\{(x,y):\ g(x,y)\le a\}$$

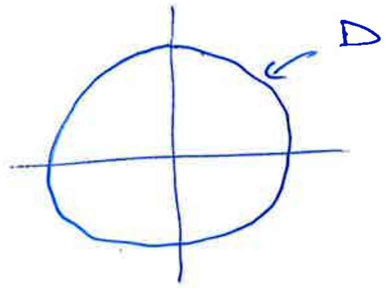
Eks: $\boxed{x^2+y^2\le 10}$



Lagrange-problem: $g(x,y)=a$

Alle pkt er randpkt

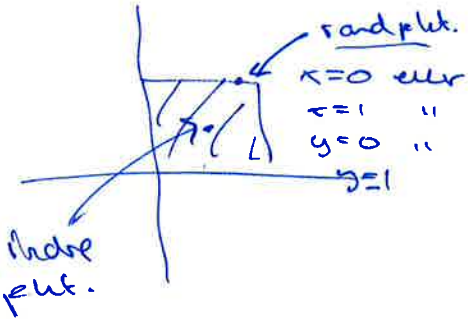
max $x+3y$ når $x^2+y^2=10$



Kuhn-Tucker problem: Både indre pkt og randpkt

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1$



$0<x<1$

$0<y<1$

Hvordan spille betingelsene i ekstremverdisetn:

(1) f er kontinuerlig: oppfyllt for alle "vanlige" funksjoner

(2) D er lukket: alle bibetingelser inneholder =

(dvs = $\le$ $\ge$)

randpunktene er inkludert i D

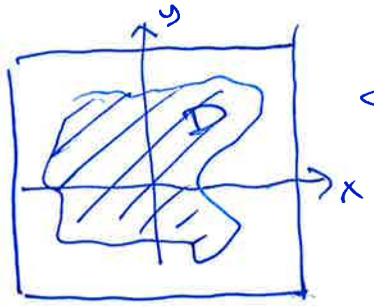
$\Rightarrow$ oppfyllt i alle Lagrange og Kuhn-Tucker problem.

Eks: max $x+y$ når $x^2+y^2<1$

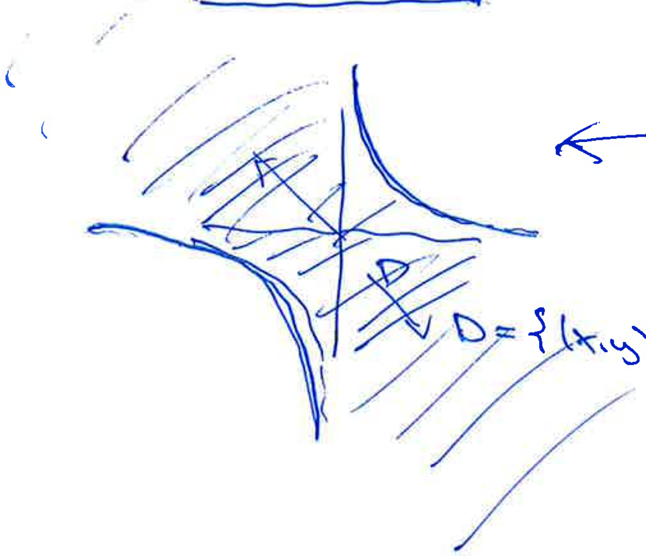
D ikke lukket

(3) D er begrenset.

Def: Mengden D er begrenset dersom det finnes et rektangel som inneholder alle pkt. i D.



← D er begrenset siden rektangelet inneh. D.



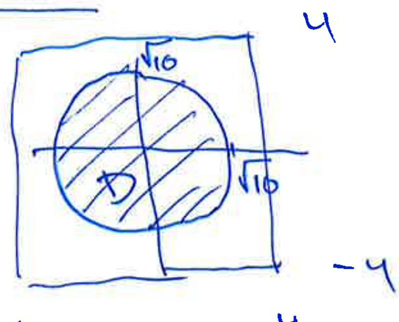
← D er ikke begrenset

$D = \{(x,y) : xy \leq 1\}$

Metode for å sjekke:

i) Ved hjelp av tegning av D

Eks: $x^2+y^2 \leq 10$



ii) Ved hjelp av regning: Finns det en største og minste x-verdi i D?

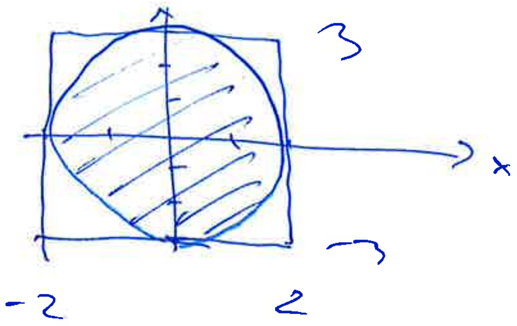
— " — y-verdi "

Eks: $\quad 9x^2 + 4y^2 \le 36$

Største og minste x-verdi:

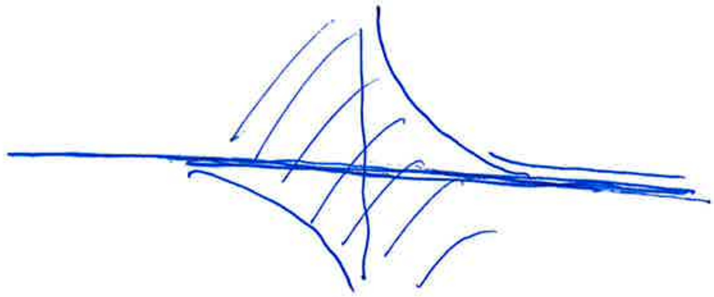
$x^2 = 4$: Største $x = 2$, minst $x = -2$

$y^2 = 9$: " $y = 3$ " $y = -3$



Eks: $\quad xy \le 1 \qquad y = 0, x = x$

$(x, 0)$ er alltid i D



ingen største x-verdi i D

$\Downarrow$

D er ikke begrenset.