FORELESNING 29

MET1180

Eivind Eriksen, APR 20 2016

MATEMATIKK

<u>Plan:</u>

1. Optimering med bibetingelser
   - Lagranges metode

<u>Pensum:</u>

[S] 8.4

[E] 7.6

---

1. Lagranges metode

> **Lagrange-problem:**
>
> max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$

<u>Ekstremverdisetningen:</u>

Hvis f er en <u>kontinuerlig</u> funksjon på en <u>lukket</u> og <u>begrenset</u> mengde D, så har f et maksimum og et minimum på D.

<u>! Lagrange-problemer:</u>

- f kontinuerlig: ok for "vanlige" funksjoner
- D = mengden av tillatte punkter = alle punkter som oppfyller bibetingelsene:

D lukket: ok.

D begrenset: må sjekkes

Konklusjon:

I Lagrange-problemet

$$\boxed{\max/\min \quad f(x,y) \quad \text{når} \quad g(x,y)=a}$$

har vi:

$$\left.\begin{array}{l} D = \{(x,y) : g(x,y)=a\} \\ \text{begrenset} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{problemet har maks/min}$$

D kalles <u>kompakt</u> hvis den er lukket og begrenset

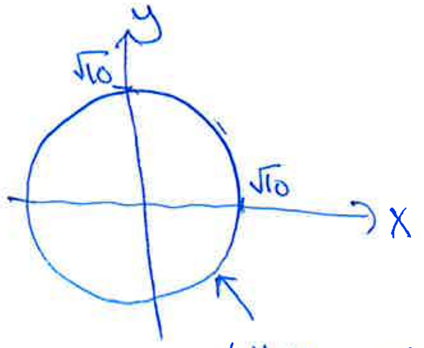
Eks: max/min $f(x,y) = x + 3y$ når $\underbrace{\overbrace{x^2+y^2}^{g(x,y)} = 10}_{\text{tillatte punkter}}$

Lagranges metode:

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot \left(g(x,y)\right)$$

$$= x + 3y - \lambda \cdot \left(x^2+y^2\right)$$

$$= \underline{x + 3y - \lambda(x^2+y^2)}$$



tillatte punkt = sirkel

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{L}'_x = 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 3 - \lambda \cdot 2y = 0 \end{array}}\right\} \text{Førsteordens betingelser (FOC)}$$

$$\begin{rcases} L'_x = 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 3 - \lambda \cdot 2y = 0 \end{rcases} \text{(FOC)} \quad \text{Førsteordens-betingelsene}$$

$$x^2 + y^2 = 10 \; \} \; \text{(C)} \quad \text{Bibetingelsen}$$

<u>Løser likningene:</u>

$$\begin{cases} 1 - \lambda \cdot 2x = 0 & (1) \\ 3 - \lambda \cdot 2y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

<u>Løser (1) for x:</u>

$$1 - \lambda \cdot 2x = 0$$

$$1 = 2\lambda \cdot x \quad \Leftarrow \lambda \neq 0$$

$$\underline{x = \frac{1}{2\lambda}}$$

<u>Løser (2) for y:</u>

$$3 - \lambda \cdot 2y = 0$$

$$3 = 2\lambda \cdot y \quad \Leftarrow (\lambda \neq 0)$$

$$\underline{y = \frac{3}{2\lambda}}$$

<u>Setter inn i (3):</u>

$$x^2 + y^2 = 10$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 10$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 10 \quad | \cdot 4\lambda^2$$

$$\frac{10}{40} = 1 + 9 = \frac{\cancel{10} \cdot 4\lambda^2}{\cancel{40}}$$

$$\lambda^2 = 1/4 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{1/4} = \underline{\pm 1/2}$$

<u>Løsninger:</u>

$\lambda = 1/2$: $x = 1, y = 3$

$\lambda = -1/2$: $x = -1, y = -3$

Lagrange-problem: max/min $x+3y$ når $x^2+y^2=10$

$L = x+3y-\lambda\cdot(x^2+y^2)$ Lagrange-funksjonen

$$\left.\begin{array}{l} L'_x = 1-\lambda\cdot 2x = 0 \\ L'_y = 3-\lambda\cdot 2y = 0 \end{array}\right\} \text{Førsteordensbetingelser (FOC)}$$

$$x^2+y^2 = 10 \quad \} \text{ Bibetingelse (C)}$$

(FOC og C samlet: Lagrange-betingelsene)

Løsning av Lagrange-betingelsene → Kandidater for max/min.

1 eks:

$(x,y;\lambda) = (1,3;\ 1/2)$ $f(1,3)=10$ (max?)

$(x,y;\lambda) = (-1,-3;\ -1/2)$ $f(-1,-3)=-10$ (min?)

$(f(x,y)=x+3y)$

Resultat:

Dersom (x^*,y^*) løser Lagrange-problemet

$$\boxed{\text{max/min } f(x,y) \text{ når } g(x,y)=a}$$

da gjelder følgende: Hvis NDCQ er oppfyllt, så fins et tall λ slik at $(x^*,y^*;\lambda)$ oppfyller Lagrange-betingelsene.

(x^*,y^*) løsning av Lagrange-problemet (maks/min) $\underset{\text{NDCQ holder}}{\Longrightarrow}$ $(x^*,y^*;\lambda)$ løsning av Lagrange-betingelsene (FOC + C)

I praksis: En av følgende holder

BI

(1) Maks/min er blant punktene vi finner når vi løser FOC+C (Lagrange-betingelsene)

(2) Maks/min er et degenerert punkt for bibetingelsen (et pkt. som ikke oppfyller NDCQ)

(3) Det fins ikke maks/min

Eks: maks/min $x+3y$ når $x^2+y^2=10$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 10 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} (x,y;\lambda) = (1,3;\tfrac{1}{2}) \quad & f=10 \\ (-1,-3;-\tfrac{1}{2}) \quad & f=-10 \end{aligned}\right\} \leftarrow (1)$$

(2) NDCQ: non-degenerate constraint qualification = ikke-degenerert bibetingelse

Degenerert bibetingelse:

$$\boxed{\begin{aligned} g'_x &= 0 \\ g'_y &= 0 \\ x^2+y^2 &= 10 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y &= 0 \\ &\Downarrow \\ (x,y) &= (0,0) \end{aligned}$$

ikke tillatt

Ingen tillatte pkt med degenerert bibetingelse

$\Downarrow$

NDCQ holder

NDCQ holder: $2x \neq 0$ eller $2y \neq 0$

i alle tillatte punkt.

NDCQ holder ikke: $2x = 2y = 0$ i et tillatt punkt.

degenererthet for bibetingelsen

$x=0,\ y=0 \Rightarrow (0,0)$ ikke tillatt

$x^2+y^2 \neq 10$

NDCQ holder i alle punkt

Degenerert bibetingelse: $g'_x = g'_y = 0$ i et tillatt punkt $g(x,y)=a$

Eks: $x^2+y^3=0$ bibetingelse

↑

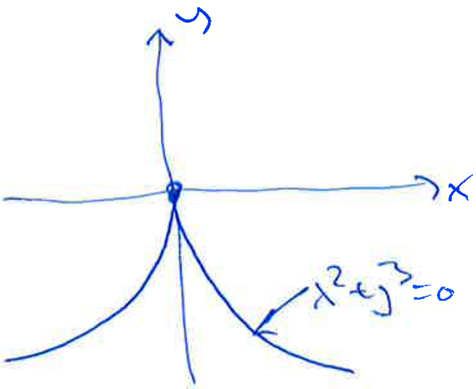
degenerert i $(0,0)$

$g = x^2+y^3$

$g'_x = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$g'_y = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$(x,y) = (0,0)$ tillatt.

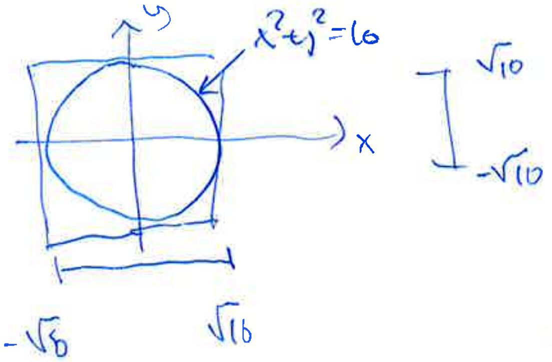


③ Det fins ikke maks/min

Hvis mengden D av tillatte punkter er begrenset, så fins maks/min.

Eks: $x^2+y^2=10$

D: sirkelen $x^2+y^2=10$



D begrenset: ok.

$-\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10}$

$-\sqrt{10} \le y \le \sqrt{10}$

$\Downarrow$

max/min $x+3y$ når $x^2+y^2=10$ har maks/min.

Konklusjon: max/min $x+3y$ når $x^2+y^2=10$

① $L'_x = 1+\lambda\cdot 2x = 0$

$L'_y = 3+\lambda\cdot 2y = 0$

$x^2+y^2=10$

"Vanlige" kandidatpunkt:

$(x,y;\lambda) = (1,3;\ 1/2)$ $f=10$ maks

$(-1,-3;\ -1/2)$ $f=-10$ min

② $g'_x = 2x = 0$

$g'_y = 2y = 0$

$x^2+y^2=10$

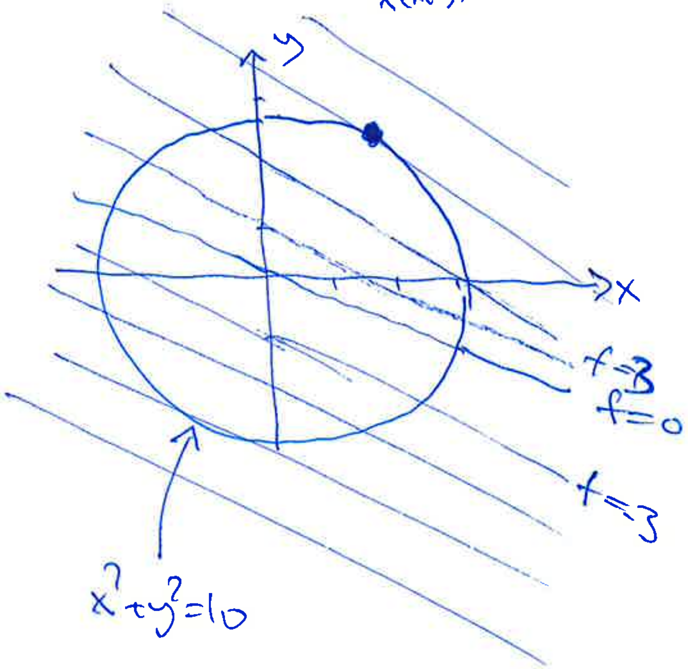
kandidatpunkt med degenerert bibetingelse (NDCQ holder ikke)

ingen

③ maks/min finnes ikke

D begrenset ⇒ maks/min fins

max/min $\underset{f(x,y)}{\underset{\parallel}{x+3y}}$ når $x^2+y^2=10$



Nivåkurver for f:

$$f(x,y) = x+3y = h$$
$$3y = h - x$$
$$y = \frac{h}{3} - \frac{x}{3}$$

Mål: Sirkelen $g(x,y)=a$ tangerer en nivåkurve $f(x,y)=h$

Tangenten:

På $g(x,y)=a$: $y' = -\frac{g'_x}{g'_y}$

På $f(x,y)=h$: $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$

Tangentpunkt:

$$-\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \lambda \cdot g'_x \quad \text{for en } \lambda \\ f'_y &= \lambda \cdot g'_y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f'_x - \lambda \cdot g'_x &= 0 \\ f'_y - \lambda \cdot g'_y &= 0 \end{aligned} \quad \boxed{\begin{aligned} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \end{aligned}}$$

Utledning:

$$-\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{f'_x}{f'_y} \quad \Big| \cdot (-1) \cdot g'_y f'_y$$

$$g'_x f'_y = f'_x g'_y \Rightarrow \frac{f'_y}{g'_y} = \frac{f'_x}{g'_x}$$

Setter $\lambda = \frac{f'_x}{g'_x}$:

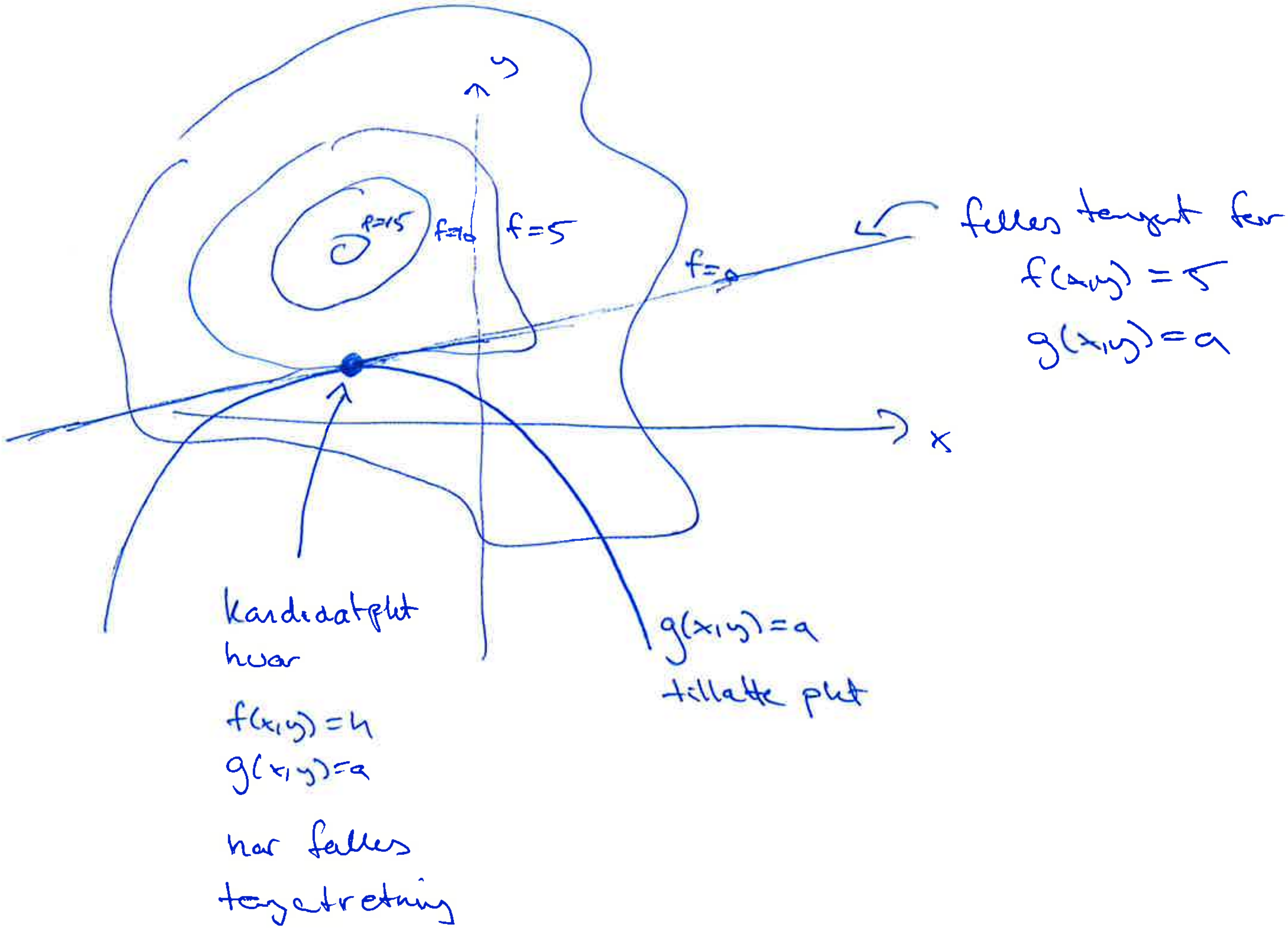
$$\frac{f'_x}{g'_x} = \frac{f'_y}{g'_y} = \lambda$$

$$\Updownarrow$$

$$f'_x = \lambda \cdot g'_x$$
$$f'_y = \lambda \cdot g'_y$$

Basis for Lagrange's metode

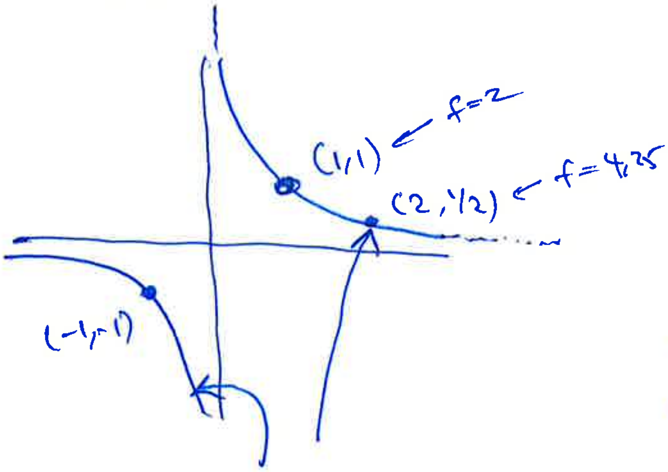
max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = a$



Lagrange: Et maks/min der bibetingelsen ikke er degenerert, må ha felles tangentretn. for $f(x,y)=h$ og $g(x,y)=a$, og derfor er

$$\boxed{\begin{aligned} L'_x &= f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ L'_y &= f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{aligned}}$$

Eks: max x^2+y^2 når $xy=1$



$D=\{(x,y): xy=1\}$

$y=1/x$

D ikke begrenset

$\mathcal{L}=x^2+y^2-\lambda\cdot(xy)$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \mathcal{L}'_x = 2x-\lambda\cdot y = 0\\ &(2)\quad \mathcal{L}'_y = 2y-\lambda\cdot x = 0\\ &(3)\quad xy = 1\end{aligned}\right\}\ \text{FOC} + \text{C}$$

$x=\frac{\lambda y}{2}$ fra (1)

(2): $2y-\lambda\cdot\left(\frac{\lambda y}{2}\right)=0 \quad |\cdot 2$

$4y-\lambda^2 y=0$

$y\cdot(4-\lambda^2)=0$

~~$y=0$, $x=0$, $xy=1$ umulig~~ eller $4-\lambda^2=0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lambda^2=4 \quad \lambda=\pm 2\\ &\lambda=2: \quad x=y\\ &xy=1 \quad x^2=1\\ &\qquad x=\pm 1\\ &(1,1;2)\\ &(-1,-1;2)\end{aligned}}$$

~~$\lambda=-2$: $x=-y$~~
~~$xy=1$ $x\cdot(-x)=1$~~
~~$-x^2=1$~~
~~$x^2=-1$~~
~~umulig.~~

Konklusjon:

Løsning av FOC+C (Lagrangebet.)
= Vanlige kandidatpunkt:

$(x,y;\lambda)=(1,1;2)\quad f=2$
$\qquad\quad=(-1,-1;2)\quad f=2$

Siden $f(2,1/2)=4{,}25>2$ er disse kandidatpunktene ikke maks.

NDCQ: $g=xy=1$

$g'_x=y=0$
$g'_y=x=0$ } $(x,y)=(0,0)$ ikke tillatt
$xy=1$

Kan utelukke (2), (1)

$\Downarrow$

Fins ikke maks.

Eks: maks y når $x^2+y^3=0$

$$\mathcal{L} = y - \lambda\cdot(x^2+y^3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= -\lambda\cdot 2x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 1-\lambda\cdot 3y^2 = 0 \\ & x^2+y^3 = 0 \end{aligned}}$$

$-2\lambda x = 0$

$\lambda=0$ eller $x=0$

~~$\lambda = 0$~~

~~$1=0$ umulig~~

~~$0+y^3=0$~~

~~$y=0$~~

~~$1-\lambda\cdot 3\cdot 0^2=0$~~

~~$1=0$~~

~~umulig~~

ingen vanlige kandidatpkt.
(1) utelukkes.

(2) NDCQ: Degenerert

$g'_x = 2x = 0$ $\quad x=0$

$g'_y = 3y^2=0$ $\quad y=0$

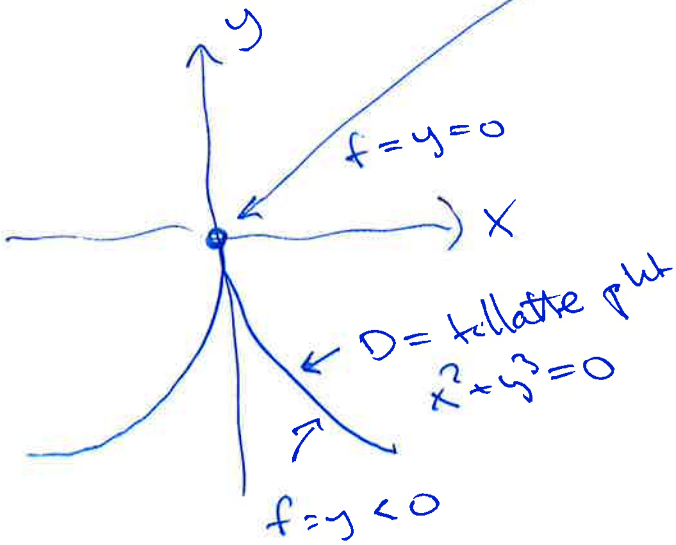
$x^2+y^3=0 \leftarrow (0,0)$ tillatt.

$\Downarrow$

degenerert

$\longrightarrow$ $(0,0)$ kan være maks

Konklusjon:
$(x,y)=(0,0)$ er maks



$y^3 = -x^2$

$y = \sqrt[3]{-x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$