FORELESNING 3

MET 1180

BI

EIVIND ERIKSEN, SEP 02, 2015

MATEMATIKK

Plan:

1. Nåverdi av kontantstrømmer
2. Endelige rekker
3. Annuiteter og annuitetslån

Pensum:

[S] 4.2-4.5, 5.1-5.2, 5.5-5.8

[E] 1.4-1.6 (Kap. I)

Minner om Oppgaveregning Mandag / Tirsdag i de ukene det ikke er seminargrupper. Se Forelesningsplan.

Opps. 1.1.8

-70% $\qquad +R\% = r = \frac{R}{100}$

Vekstfaktorer: $1-70\% = 1-0.7 = 0.30$ $\qquad 1+r$

Samlet vekstfaktor:

$$0{,}30 \cdot (1+r) = 1$$

$$1+r = \frac{1}{0.30}$$

$$r = \frac{1}{0{,}30} - 1$$

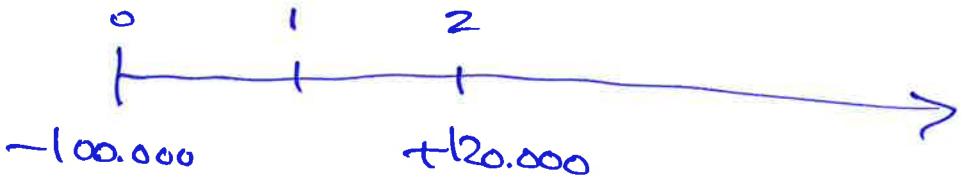
$$\simeq 2.33$$

$$= \underline{\underline{233\%}}$$

① Nåverdi av kontantstrømmer

Kontantstrøm: En serie med inn- og utbetalinger som inntreffer på ulike tidspunkt.

Eks: Vi investerer 100.000 kr, og forventer å få tilbakebetalt kr 120.000 om to år.



Nåverdi

Nåverdien av en betaling K om n år er

$$\frac{K}{(1+r)^n} = K \cdot (1+r)^{-n}$$

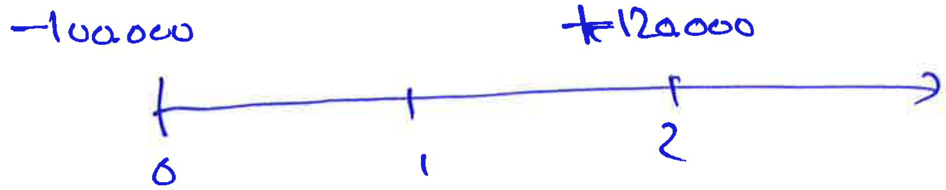
når renten er r. Renten som brukes kalles <u>diskonteringsrenten</u>.

I eks:

$$\frac{120.000}{(1+r)^2} = \frac{120.000}{1{,}10^2} \simeq 99.174 \text{ kr}$$

hvis diskonteringsrenten er 10%.

$$\underset{(\text{nåverdi})}{K_0} = \frac{K}{(1+r)^n} \iff K = K_0 \cdot (1+r)^n$$



-100.000

$\frac{120.000}{(1+r)^2}$

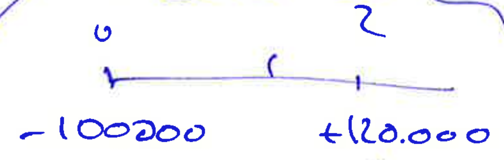
$\simeq 99.174$

$-826 \simeq -100.000 + 99.174$ — nåverdi til kontantstrømmen

Nåverdien til en kontantstrøm = summen av nåverdiene til alle betalinger i kontantstrømmen

Internrenten til en kontantstrøm = den renten som gir nåverdi = 0

Utregning av internrente:



$\frac{120000}{(1+r)^2}$

$$-100.000 + \frac{120.000}{(1+r)^2} = 0$$

$$\frac{120.000}{(1+r)^2} = \frac{100.000}{1}$$

$$120.000 = 100.000(1+r)^2$$

$$\frac{120.000}{100.000} = (1+r)^2$$

$$1,2 = (1+r)^2$$

$$1+r = \sqrt{1,2}$$

$$r = \sqrt{1,2} - 1 \simeq 9,54\,\%$$

Nåverdi av lange kontantstrømmer er tidkrevende å regne for hånd, og internrente blir svært vanskelig å regne ut for hånd.

② Endelige rekker

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n$: tallfølge

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Eks: $1+3+5+7+\dots+199$

Sumnotasjon:

$\sum$: gresk sigma, betyr sum

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\|$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$\sum_{i=1}^{n}$: $i = 1, 2, 3, \dots, n$

hjelpe-variabel som løper gjennom disse heltallene

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

Eks: $\sum_{i=1}^{100} (2i-1) = \underbrace{1+3+5+\dots+199}_{\text{Summen skrevet ut}}$

$i = 1, 2, 3, \dots, 100$

Aritmetisk rekker : $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

BI

Rekken er en aritmetisk rekke hvis

$$a_i - a_{i-1} = d \quad \text{for } i = 2, 3, \ldots, n$$

for et fast tall d, som kalles rekkens differanse

Med andre ord:

$a_2 - a_1 = d \qquad a_3 - a_2 = d \qquad a_4 - a_3 = d \quad \ldots \quad a_n - a_{n-1} = d$

$a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_2 + d \qquad a_4 = a_3 + d \quad \ldots \quad a_n = a_{n-1} + d$

Eks: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 197 + 199 = S_n$ Aritmetisk med $d = 2$

$199 + 197 + 195 + 193 + \quad + 3 + 1 = S_n$

$200 + 200 + 200 + 200 + \ldots + 200 + 200$

$$S_n + S_n = 200 \cdot n = 200 \cdot 100 = 20.000$$

$$2 S_n = 20.000 \Rightarrow S_n = 10.000$$

Formel for aritmetisk rekke:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Geometrisk rekke

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

En geometrisk rekke er en rekke der

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = k \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, n$$

der k er et fast tall.

Med andre ord:

$$\frac{a_2}{a_1} = k \qquad \frac{a_3}{a_2} = k \quad \dots \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = k$$

$$a_2 = a_1 \cdot k \qquad a_3 = a_2 \cdot k = a_1 \cdot k^2 \quad \dots \quad a_n = a_{n-1} \cdot k = a_1 \cdot k^{n-1}$$

Eks: $1 + 1{,}06 + 1{,}06^2 + 1{,}06^3 + \dots + 1{,}06^{17}$ ← Geometrisk rekke, $k = 1{,}06$

Husk: $a_i = a_1 \cdot k^{i-1}$ $\qquad a_1 \; a_2 \; a_3 \dots a_i$ (i-1 steg)

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$= a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \dots + a_1 k^{n-1}$$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1})}$$

← gjelder for alle geometriske rekker

Formel for geometrisk rekke

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n-1}{k-1}, \quad k \neq 1$$

$$S_n = a_1 \cdot n, \quad k = 1$$

Bevis: $(1+k+k^2+\dots+k^{n-1}) \cdot (1-k)$

$$= 1 + \cancel{k} + \cancel{k^2} + \cancel{k^3} + \dots + \cancel{k^{n-2}} + \cancel{k^{n-1}}$$
$$- (\cancel{k} + \cancel{k^2} + \cancel{k^3} + \dots + k^n) = 1 - k^n$$

$$\frac{(1+k+k^2+\dots+k^{n-1}) \cdot \cancel{(1-k)}}{\cancel{(1-k)}} = \frac{1-k^n}{1-k}$$

$$1+k+k^2+\dots+k^{n-1} = \frac{1-k^n}{1-k}$$

$$S_n = a_1 \cdot (1+k+\dots+k^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} \qquad \square$$

Eks: $S_{18} = 1 + 1{,}06 + 1{,}06^2 + \dots + 1{,}06^{17}$ — geom. $k = 1{,}06$

$$= 1 \cdot \frac{1{,}06^{18} - 1}{1{,}06 - 1} = \frac{1{,}06^{18} - 1}{0{,}06} \simeq \underline{\underline{30{,}9}}$$

Eks: En geometrisk rekke har $k=2$ og $a_3=12$. Finn S_{10}.

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$$

$$= a_1 \cdot \frac{k^{10}-1}{k-1} \qquad \underline{\underline{k=2}} \quad \underline{a_1 = 3}$$

$$a_3 = 12 \qquad a_3 = a_1 \cdot k^2$$

$$12 = a_1 \cdot 2^2$$

$$a_1 = \frac{12}{4} = \underline{3}$$

$$= 3 \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1} = 3\cdot(2^{10}-1) = 3\cdot(1024-1)$$

$$= \underline{\underline{3.069}}$$

Upps:

$$x - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{25} - \frac{x^4}{5^3} - \dots = x - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{25} - \frac{x^4}{125} + \dots$$

Regn ut S_n.

Løsning:

$$S_n = x - \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{25} - \frac{x^4}{125} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{5^{n-1}}$$

Geometrisk rekke: $\boxed{a_1 = x \quad k = -\frac{x}{5}}$ $\qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{-x^2/5}{x}$

$$\underline{\underline{S_n = x \cdot \frac{(-x/5)^n - 1}{(-x/5) - 1}}} = 5x\,\frac{(-\frac{x}{5})^n - 1}{-x-5} = \frac{5x\left(1 - (-\frac{x}{5})^n\right)}{x+5}$$

3 Annuiteter og annuitetslån

Eks: Et beløp på 10.000 kr betales årlig i ~~fem~~ år, første gang om ett år.

0	1	2	3	4	5
	10.000	10.000	10000	10.000	10.000

Nåverdi ved rente $r = 10\%$:

Geom. ved $k = \frac{1}{1,10}$ →

$$\frac{10.000}{1,10^1} + \frac{10.000}{1,10^2} + \frac{10.000}{1,10^3} + \frac{10000}{1,10^4} + \frac{10.000}{1,10^5}$$

$$= \frac{10.000}{1,10} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,10}\right)^5}{1 - \frac{1}{1,10}} = \frac{10.000 \cdot \left(1 - (1/1,10)^5\right)}{1,10 - 1}$$

$$= \frac{10.000}{0,10} \cdot \frac{1,10^5 - 1}{1,10^5} = \frac{10.000 \cdot (1,10^5 - 1)}{0,10 \cdot 1,10^5}$$

$$\simeq \underline{37.907,87}$$

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{1,10^5}\right) \cdot 1,10^5}{1 \cdot 1,10^5} = \frac{1,10^5 - 1}{1,10^5}$$

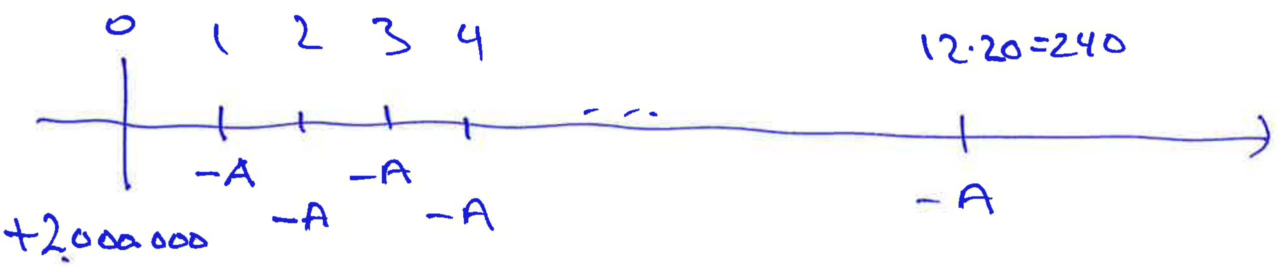
Etterskuddsannuitet

Dersom vi mottar en annuitet I i n år, første gang om et år, og renten er r, så er nåverdien lik

$$\frac{I\cdot\left((1+r)^n-1\right)}{r\cdot(1+r)^n} = I\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r\cdot(1+r)^n}$$

Annuitetslån:

Eks: Et boliglån på 2.000.000 kr gis som et annuitetslån over 20 år, med rente 4,5% per år, med månedlig kapitalisering og tilbakebetaling.



$$2000.000 = \frac{A}{(1+r)^1} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{A}{(1+r)^{240}}$$

$$r = \frac{4{,}5\%}{12} = \frac{0{,}045}{12}$$

månedsrente

$$2.000.000 = \frac{A}{r}\cdot\frac{(1+r)^{240}-1}{(1+r)^{240}}$$

$$A = 2000.000 \cdot \frac{r\cdot(1+r)^{240}}{(1+r)^{240}-1} \simeq \underline{12.652{,}99}$$

Total tilbakebetaling: $240 \cdot 12.652,99$

$\simeq 3.036.717,60$

Samlede avdrag: 2.000.000

Samlede renter: 1.036.717,60

BI

Annuitetslån

Et annuitetslån med lånebeløp L, terminrente r og n rentede terminer, har terminbeløp

$$A = L \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Serielån: Fast avdrag hver termin, varierende rente.

Eks: Avdrag: $\frac{2.000.000}{240} \simeq 8.333,33$

Rente: $2.000.000 \cdot r = 7.500$ $\left\{ r = \frac{4,5\%}{12} \right.$

$(2.000.000 - 8333,33) \cdot r = 7500 - 31,25$

$2.000.000 - 8333,33 \times 2) \cdot r = 7500 - 2 \cdot 31,25$

Rentene er en aritmetisk rekke, $d = -31,25$

Samlede renter = ? (Se neste side)

Samlede renter er en aritmetisk rekke:

$$S_{240} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{240}$$

$$= 7500 + (7500 - 31{,}25) + (7500 - 2 \cdot 31{,}25) + \dots (7500 - 239 \cdot 31{,}25)$$

$$= 240 \cdot \frac{7500 + (7500 - 239 \cdot 31{,}25)}{2}$$

$$= 240 \cdot \frac{7500 + 31{,}25}{2} = 903.750$$

Altså: Serielån gir

Samlede avdrag:	2.000.000
Samlede renter:	903.750
Totalt betalt:	2.903.750