FORELESNING 30 — MET1180 BI

EIVIND ERIKSEN, APR 27 2016

MATEMATIKK

Plan:

1. Oppsummering Lagrange-problemer
2. Eksamensoppgaver MET11803 12/2015, oppg 4-5
3. Kuhn-Tucker problemer

Konte MET11802 (flervalg) — mandag
Eksamen MET11803 — 03. juni

Rep. foreles.
27/05

1. Lagrange-problemer

$$\text{max / min } f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

Løsningsmetode:

i) Finner kandidater for max / min.

a) Vanlige kandidater: FOC + C

$$\mathcal{L}(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{FOC:} & \begin{cases} \mathcal{L}'_x = f'_x - \lambda \cdot g'_x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = f'_y - \lambda \cdot g'_y = 0 \end{cases} \\ \text{C:} & \quad g(x,y) = a \end{array}\right\}$$

Løsning $(x,y;\lambda)$ gir kandidat for max / min.

BI

b) Spesielle kandidater: NDCQ ikke oppfylt

$g'_x = g'_y = 0$ ← punkter med degenerert bibetingelse

$g(x,y) = a$ ← tillatte punkt

Punkter som oppfyller $g'_x = g'_y = 0$, $g(x,y) = a$ er spesielle kandidater for maks/min.

Liste av kandidatpkter fra a) og b).

↓

Regn ut $f(x,y)$ for hvert pkt i listen ⇝ Beste kandidat for maks/min.

(ii) Konklusjon:

* Beste kandidat for maks er maks eller det fins ikke noe maks/min. ($f \to \infty$)

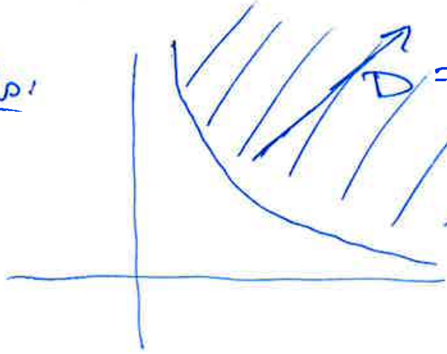
* Beste kandidat for min er min eller det fins ikke noe minimum ($f \to -\infty$)

Ekstremverdisetningen:

Hvis mengden $D = \{(x,y) : g(x,y) = a\}$ av tillatte pkt er begrenset, så har Lagrange-problemet en løsning:

Beste kandidat for maks/min er maks/min.

Eks:



D = tillatte pkt
ikke begrenset

Kan hende at $f \to \infty$ langs visse stier innenfor D, men det avhenger av f

Tolkning av λ:

Anta at (x^*, y^*) er maks i et Lagrange-problem, oppfyller FOC + C for en λ.

Vi kan da tolke λ som den marginale endringen i maksimumsverdien $f(x^*, y^*)$ når vi endrer konstanten a i bibetingelsen $g(x,y) = a$.

Eks: $\boxed{\text{max } x + 3y \text{ når } x^2 + y^2 = 10}$

$$\mathcal{L} = x + 3y - \lambda \cdot (x^2 + y^2)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}'_x &= 1 - \lambda \cdot 2x = 0 \\ \mathcal{L}'_y &= 3 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Kandidat: $(x, y; \lambda) = (1, 3; 1/2)$
$(-1, -3; -1/2)$

Det viser seg at
$(x^*, y^*) = (1, 3)$ er maks
$f(x^*, y^*) = 10$
$\lambda = 1/2$

Øker vi konstanten i bibetingelsen fra $x^2 + y^2 = 10$ til $x^2 + y^2 = 11$, vil maksimumsverdien endres til:

$$\simeq f(x^*, y^*) + \lambda \cdot \Delta a$$
$$= 10 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 = 10{,}5$$

Presis beskrivelse av Lagrange-multiplikator

max/min $f(x,y)$ når $g(x,y) = \underline{\underline{a}}$

<u>Løsn:</u> $\left(x^*(a),\ y^*(a)\ ;\ \lambda(a)\right)$ $\leftarrow$ maksimumspkt (min)

$f^*(a) = f(x^*(a), y^*(a))$ $\leftarrow$ maksimumsverdi (min)

<u>Eks:</u> max $x+3y$ når $x^2+y^2=a$

<u>Tolkning av λ:</u>

$$\boxed{\frac{d f^*(a)}{da} = \lambda}$$

Eksamen	MET 11803 Matematikk
Dato	15. desember 2015 kl 0900 - 1400

OPPGAVE 1.

En eiendom antas å ha verdien $V(t) = 120\,e^{\sqrt{t}/5}$ etter t år. Vi bruker kontinuerlig forrentning med diskonteringsrente $r = 4\%$ når vi beregner nåverdi av salgssummen.

(a) Vi ønsker å selge eiendommen når nåverdien av salgssummen er maksimal. Når er det optimalt å selge eiendommen?
(b) Det tar T år før eiendommens verdi har økt til det dobbelte. Finn T, og vis at det tar $3T$ år til før verdien har doblet seg på nytt.

OPPGAVE 2.

Regn ut de ubestemte integralene:

$$(a) \int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (b) \int x\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \qquad (c) \int \frac{x^3+x^2-2x-6}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

Regionen R er avgrenset av de rette linjene $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ og kurven $y = \ln x$.

(d) Lag en skisse av regionen R, og beregn dens areal.

OPPGAVE 3.

Vi betrakter matrisen A og det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

der a er en parameter og x,y,z er variable.

(a) Regn ut $|A|$.
(b) Finn A^{-1} når $a = 0$.
(c) Når har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ uendelig mange løsninger? Løs det lineære systemet i disse tilfellene.
(d) Anta at a er slik at $|A| \neq 0$. Løs det lineære systemet ved hjelp av Cramers regel.

OPPGAVE 4.

Vi betrakter funksjonen

$$f(x,y) = x^2y + xy^3 + xy^2$$

(a) Regn ut f'_x og f'_y, og finn eventuelle stasjonære punkter for f.
(b) Er $(0,0)$ et sadelpunkt? Begrunn svaret.
(c) Finn alle lokale maksima og minima for f.
(d) La $D = \{(x,y) : 0 \le x,y \le 1\}$. Finn maksimums- og minimumsverdien til f på D.

OPPGAVE 5.

Vi betrakter nivåkurven $g(x,y) = 0$, hvor g er funksjonen

$$g(x,y) = x^3 + xy + y^2$$

(a) Finn alle punkt på nivåkurven med $x = -2$, og bestem tangenten i hvert av disse punktene.
(b) Finn maksimumsverdien til $f(x,y) = x$ under bibetingelsen $x^3 + xy + y^2 = 0$.

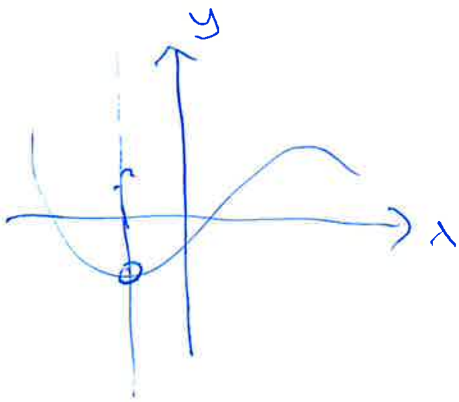
(2) Eksamen MET11803, 12/2015, Opps 5

BI

$g(x,y) = x^3 + xy + y^2$.

Nivåkurven $g(x,y)=0$:

$x^3 + xy + y^2 = 0$



a) Punkt med $x=-2$:

$(-2)^3 + (-2)y + y^2 = 0$

$y^2 - 2y - 8 = 0$

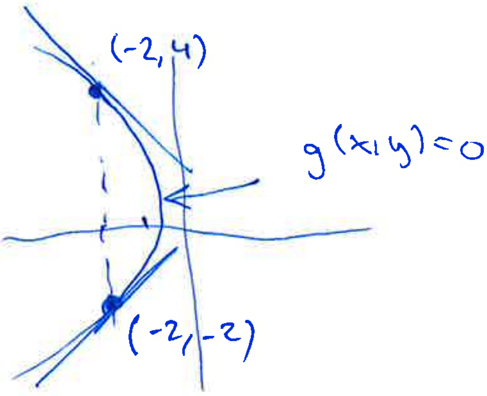
$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 8}}{2} = \frac{2\pm 6}{2} = 4, -2$

$\longrightarrow (x,y) = (-2,4)$ og $(x,y) = (-2,-2)$

Tangentlinje:

$y - y_0 = a\cdot(x - x_0)$

Stigningstall til tangenten:



$a = -\frac{g'_x}{g'_y} = -\frac{3x^2+y}{x+2y}$

$(-2,4)$: $a = -\frac{12+4}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$

$y - 4 = -\frac{8}{3}\cdot(x+2)$

$y = -\frac{8}{3}x + \left(4 - \frac{16}{3}\right)$

$y = -\frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$

$(-2,-2)$: $a = -\frac{12-2}{-6} = -\frac{10}{-6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

BI

$$y+2=\frac{5}{3}\cdot(x+2)$$

$$y=\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}-2$$

$$\underline{\underline{y=\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}}}$$

b) maks $f(x,y)=x$ når $g(x,y)=\underline{x^3+xy+y^2=0}$

$$L=x-\lambda\cdot(x^3+xy+y^2)$$

$$\underline{\text{FOC}}:\begin{cases}L'_x= & 1-\lambda\cdot(3x^2+y)=0\\ L'_y= & -\lambda\cdot(x+2y)=0\end{cases}$$

$$\underline{\text{C}}:\quad x^3+xy+y^2=0$$

(2): $-\lambda\cdot(x+2y)=0$

$-\lambda=0$ eller $x+2y=0$

$\underline{\lambda=0}$

(1) $\cancel{1-0\cdot(\ldots)=0}$

$\cancel{1=0}$

~~umulig~~

$\underline{x=-2y}$

(1) $1-\lambda\cdot(3(-2y)^2+y)=0$

$1-\lambda\cdot(12y^2+y)=0$

$1=\lambda\cdot(12y^2+y)$

$\underline{\lambda=\frac{1}{12y^2+y}}$

(3) $(-2y)^3+(-2y)\cdot y+y^2=0$

$-8y^3-2y^2+y^2=0$

$-8y^3-y^2=0$

$y^2\cdot(-8y-1)=0$

$\underline{y=0}$ eller $\underline{y=-1/8}$

$\underline{y=0}$: $x=0$, λ ikke definert $(1=0)$

$\Rightarrow$ ingen løsning.

$\underline{y=-1/8}$: $\underline{x=1/4}$,

$$\lambda=\frac{1}{12\cdot 1/64-1/8}\cdot\frac{64}{64}=\frac{64}{12-8}=\frac{64}{4}=\underline{16}$$

Kandidatpkt. : FOC + C ("vanlig kand.")

$(x, y; \lambda) = (1/4, -1/8\ ;\ \lambda = 16)$ $\quad f = \underline{1/4}$

Kandidatpkt: NDCQ

$\underline{g'_x = g'_y = 0}$ $\qquad g(x,y) = 0$

$\cancel{12y^2 - 12y = 0}$

(1) $g'_x = 3x^2 + y = 0$

(2) $g'_y = x + 2y = 0 \implies x = -2y$

(1) $3 \cdot (-2y)^2 + y = 0$

$12y^2 + y = 0$

$y \cdot (12y + 1) = 0$

$y = 0$ eller $y = -1/12$

$x = 0$ $\qquad x = 1/6$

$(x,y) = (0,0)$: $\quad g(x,y) = 0$

$x^3 + xy + y^2 = 0$ $\quad$ ok.

~~$(x,y) = (1/6, -1/12)$: $\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right)^2 \neq 0$~~

~~$\frac{1}{6^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6^2}$~~

Komplett liste av kand:

$(x, y; \lambda) = (1/4, -1/8\ ;\ 16)$ $\quad f = 1/4 \leftarrow$ Beste kand. for maks

~~$(x,y) = (0,0)$ $\quad f = 0$~~

Er $\underline{\underline{x = 1/4}}$ den største x-verdien blant pkt. på $g(x,y) = 0$? $\underline{\text{Ja.}}$

<u>Ekstremverdisetn:</u> Er <u>mengden D</u> av tillatte pkt begrenset?

D: $x^3 + xy + y^2 = 0$ ← forsøker å løse for y

$$y^2 + x \cdot y + x^3 = 0$$

$$(1)y^2 + (x)y + (x^3) = 0$$

$a = 1 \qquad b = x \qquad c = x^3$

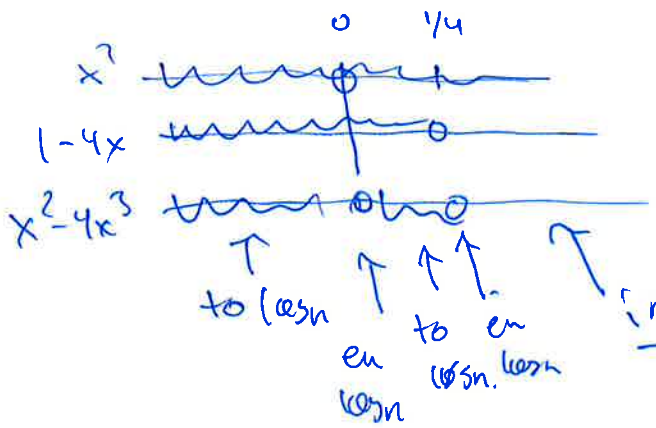
$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4x^3}}{2}$$

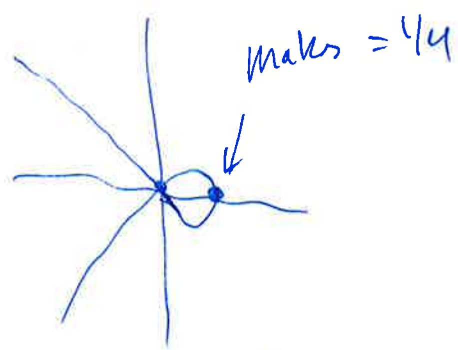
$x^2 - 4x^3 > 0$: to løsn. for y

$x^2 - 4x^3 = 0$: en løsn. for y ← $y = -\frac{x}{2}$

$x^2 - 4x^3 < 0$: ingen løsn. for y

$$x^2 - 4x^3 = x^2 \cdot (1 - 4x)$$





D <u>ikke</u> begrenset

Konklusjon:

D ikke begrenset (ingen minste verdi for x), så kan ikke bruke ekstremverdisetn.

Men siden $f(x,y) = x$ og største verdi for $x = 1/4$ fra fortegnsskjema for $x^2(1-4x)$, så er $(x,y) = (1/4, -1/8)$ maks. pkt for $f(x,y) = x$ blant pkt. med $g(x,y) = 0$.

3 Kuhn-Tucker problemer

Rakk ikke dette, så det som er sagt tidligere om Kuhn-Tucker er alt som er pensum.

Øvingsoppgave: min $f(x,y) = xy$ når $x + y \geq 4$