FORELESNING 4

MET 1180
MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, SEP 09, 2015

Plan:

1. Uendelige rekker og grenseverdier
2. Kontinuerlig forrentning og Eulers tall

Pensum:

[S] 4.6-4.8, 5.3
[E] 1.7-1.8

Seminargrupper og oppsaveregning

Neste uke: Oppsaveregning Mand./Tirs.
[E] 1.4-1.6 Løsning legges ut idag.

1. Uendelige rekker

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Eks: $1+2+3+4+5+\ldots$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

$1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

Eks:

$$\underbrace{1+(-1)}_{0}+\underbrace{1+(-1)}_{0}+\underbrace{1+(-1)}_{0}+\ldots = 0$$

$$1+\overbrace{(-1)+1}^{0}+\overbrace{(-1)+1}^{0}+\overbrace{(-1)+\ldots}^{0} = 1$$

Definisjon: Uendelig rekke

Tallfølge: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ (en sekvens av tall, i en bestemt rekkefølge)

Delsummer: $S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$

Summen av de første n tallene i tallfølgen.

Hva skjer med S_n når n blir større og større?

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

Eks: $1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$

$1 = a_1$, $(-1) = a_2$, $1 = a_3$, $(-1) = a_4$

Tallfølge:

$a_1 = 1 \quad a_2 = -1$

$a_3 = 1 \quad a_4 = -1$

$\vdots$

Delsummer: $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_1 = 1 \quad S_2 = 0 \quad S_3 = 1 \quad S_4 = 0$

$$S_n = \begin{cases} 1 & , n \text{ odde} \\ 0 & , n \text{ partall} \end{cases}$$

S_n vil ikke nærme seg noen bestemt verdi når $n \to \infty$. Dvs:

$\lim_{n\to\infty} S_n$ eksisterer ikke

For å definere uendelige rekker, må vi bruke grenseverdier.

Dersom S_n nærmer seg en bestemt tallverdi S når n blir større og større, skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Vi sier da at S er grenseverdien til S_n når $n\to\infty$. Vi skriver også: $S_n \to S$ når $n\to\infty$.

Dersom S_n ikke nærmer seg en bestemt tallverdien, når n blir større og større, så sier vi

$$\lim_{n\to\infty} S_n \text{ eksisterer ikke}$$

Definisjon

Hvis $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, så sier vi at den uendelige rekken konvergerer mot S, og skriver at

$$a_1+a_2+a_3+\dots = S$$

Hvis grenseverdien ikke eksisterer, så sier vi at den uendelige rekken divergerer.

Eks: $1+2+3+4+\dots$

$a_1=1 \quad a_2=2 \quad a_3=3 \quad a_4=4 \quad \dots \quad a_n=n$

Uendelig aritmetisk rekke med $d=1$.

$$S_n = a_1+\dots+a_n = 1+2+3+\dots+n$$

$$= n\cdot\frac{1+n}{2} = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ eksisterer ikke

$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \longrightarrow 1+2+3+\dots = \infty$ divergerer

Eks: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+\dots$ aritmetisk rekke med differanse d

$$S_n = n\cdot\frac{a_1+a_n}{2} = n\cdot\frac{a_1+(a_1+(n-1)d)}{2}$$

$$= n\cdot\frac{2a_1+(n-1)d}{2}$$

$$= a_1\cdot n + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot d$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ eksisterer ikke, bortsett fra $\begin{cases} a_1=0 \\ d=0 \end{cases}$

Aritmetiske rekker divergerer, bortsett fra i det trivielle tilfellet $0+0+0+\dots$.

Eks: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ Uendelig geometrisk rekke med $k=1/2$.

$a_1=\frac{1}{2}$ $a_2=\frac{1}{4}$ $a_3=\frac{1}{8}$

$\dots$ $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$S_n = a_1+a_2+\dots+a_n = a_1\cdot\frac{1-k^n}{1-k}$$

$$=\cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\cancel{1-1/2}} = 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 \longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = 1}$ Konvergent

$S_1=\frac{1}{2}$ $S_2=\frac{3}{4}$ $S_3=\frac{7}{8}$ $\dots$ $S_n = 1-(\frac{1}{2})^n = \frac{2^n-1}{2^n}$

$n=100$: $\approx 1-8\cdot10^{-31}$

Uendelige geometriske rekker

Hvis $a_1+a_2+a_3+\dots$ er en uendelig geometrisk rekke med kvotient k, så

$-1<k<1 \longleftrightarrow |k|<1$: Rekken ~~konvergent~~ konvergent med $S=\frac{a_1}{1-k}$

$|k|\geq 1$: Rekken divergent

Eks: $a_1=1/2$ $k=1/2$ $S=\frac{1/2}{1-1/2}=\underline{1}$

$a_1=1$ $k=-1$ divergent

Generelle resultater:

Hvis $a_1 + a_2 + \dots$ er en konvergent rekke,
så følger det at $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$.

Eks: $S_n \simeq S$, $S_{n-1} \simeq S$ $\Big\}$ $S_n - S_{n-1} \simeq 0$
$n >> 0$ $\qquad S_n - S_{n-1} = a_n$

Skrivemåte:

$$\boxed{\text{Konvergent} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

implikasjonen går kun i en retning.

Eks: $1 + 4 + 9 + 16 + \dots$ divergent

$a_n = n^2$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0$

$S_n = ?$

Eks: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ er divergent

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Alternerende rekker

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ kalles en **alternerende rekke** når $a_1, a_2, \ldots > 0$

Resultat: Alternerende rekker

Dersom $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ er en alternerende rekke, og

i) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

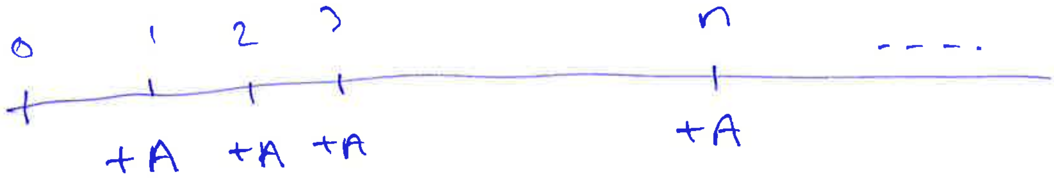
ii) $a_{n+1} < a_n$ for alle n

så er rekken konvergent.

Eks: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ er konvergent fordi den er alternerende med i) og ii) oppfyllt:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Uendelige etterskuddsannuiteter:



Nåverdi:

$$\frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \dots$$

Geometrisk rekke

$k = \frac{1}{1+r} < 1$

$(r > 0)$

$$= \underbrace{\frac{A}{1+r}}_{a_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}}}_{\frac{1}{1-k}} = \frac{A}{(\cancel{1}+r)-\cancel{1}} = \underline{\underline{\frac{A}{r}}}$$

Eks: $A = 10.000$ kr $\quad r = 5\%$

Nåverdi: $\frac{10.000}{0,05} = \underline{\underline{200.000}}$

2) Kontinuerlig forrentning og Eulers tall

Dersom nominell rente per år er r og renten kapitaliseres n ganger per år, er årlig vekstfaktor

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

$n=1$: $1+r$

$n=12$: $\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$

Kontinuerlig forrentning:

Vekstfaktor $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n}$

$r = 5\%$:

	$n=100$	$n=1000$
	1,05126	1,05127

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}05}{n}\right)^n \simeq 1{,}05127$$

For ethvert tall r, så eksisterer grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Definisjon:

Eulers tall $\quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad$ (svarer til $r=100\%$)

$r = 100\% = 1$:

	$n=100$	$n=1000$
	$\simeq 2.7048$	$\simeq 2.71692$

$e \simeq 2.71828$ Eulers tall

BI

Kontinuerlig forrentning med nominell årsrente r gir årlig vekstfaktor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

$r=100\%$: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2{,}71828$ (def.)

Man kan utlede formelen ovenfor fra definisjonen.

Eks: $r = 5\% = 0{,}05$: Vekstfaktor $e^{0{,}05}$ $\shortparallel$ Bruker $\boxed{e^x}$: $\underline{1{,}05127}$

Når vi skal regne på kontinuerlig forrentning (med rente r), bruker vi vekstfaktor $\underline{e^r}$.

Eks: Vi setter 5000 kr på en bankkonto med 4% rente som kapitaliseres kontinuerlig.

Etter 5 år: $5000\cdot\left(e^{0.04}\right)^5 = 5000\cdot e^{0.04\cdot 5}$

$= 5000\cdot 1{,}0408^5 \simeq \underline{\underline{6107{,}01}}$

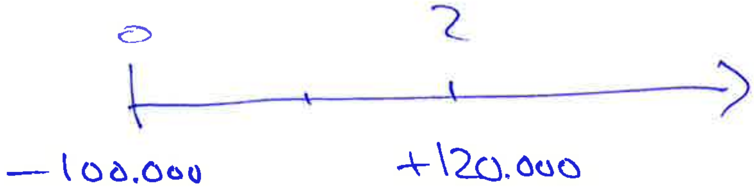
Nåverdi:

En betaling I om n år har nåverdi

$$\frac{I}{(e^r)^n} = I \cdot e^{-rn}$$

når renten er r og det er kontinuerlig forrentning.

Eks: Vi investerer 100.000 kr, og regner med tilbakebetaling på 120.000 kr om to år, gir nåverdi:
(med rente 8%, kont. forrentning)



$$N = -100.000 + \frac{120.000}{(e^{0,08})^2}$$

$$= -100.000 + 120.000\, e^{-0.16}$$

$$\approx 2.257,25$$

Årlig: $-100.000 + \frac{120.000}{1,08^2} = 2.880,66$

Eks:

Vi gjør en investering som gir en tilbakebetaling på 60.000 kr om ett år, og deretter en ny tilbakebetaling hvert år som øker med 3% per år.

0	1	2	3
$-I$	60.000	60.000 +3%	$60.000 \cdot (1{,}03)^2$

Dersom vi regner $r = 10\%$, hvor stor må investering I være for å gi positiv nåverdi?

$$-I + \underbrace{\frac{60000}{1{,}10} + \frac{60.000 \cdot 1{,}03}{1{,}10^2} + \dots}_{>I} > 0$$

Geom. rekke:

$$\frac{60.000}{1{,}10} + \frac{6.0000 \cdot 1{,}03}{1{,}10^2} + \dots > I$$

$$k = \frac{1{,}03}{1{,}10}$$

$$\underbrace{\frac{60.000}{1{,}10}}_{a_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1{,}03}{1{,}10}}}_{\frac{1}{1-k}} = \frac{60.000}{1{,}10 - 1{,}03} = \frac{60.000}{0{,}07} = \underline{\underline{857.142{,}86}}$$