FORELESNING 5

MET 1180 MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, SEP 18, 2015

Plan:

1. Lineære og kvadratiske likninger
2. Faktorisering
3. Likninger med parametre
4. Polynomer

Pensum:

[S] 1.7–1.8, 3.2

[E] 2.1–2.4

Onsdag: Plenumsregning

1. Lineære og kvadratiske likninger.

Et lineært uttrykk har formen $ax+b$, der a,b er gitte tall. Et kvadratisk uttrykk har formen ax^2+bx+c, der a,b,c er gitte tall med $a \neq 0$.

Lineær likning: VS, HS er lineære uttrykk.

Eks: $2x+3 = 1-x$

$3x+2=0 \qquad x = -\underline{2/3}$

Kvadratiske likninger:

Minst én av sidene er kvadratisk uttrykk, den andre siden lineært eller kvadratisk.

Eks.

$x^2 + 3x = 4 - x$

$x^2 + 4x - 4 = 0$ ← Std. form: $ax^2 + bx + c = 0$

Likningen: $\boxed{x^2 = k}$

Løsning: $\begin{cases} x = \pm\sqrt{k}, & k \geq 0 \\ \text{ingen løsn.}, & k < 0 \end{cases}$

Husk: $\sqrt{x^2} = |x|$

$|x|$ = absoluttverdien av x

$= \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$|4| = 4$

$|-4| = 4$

Eks. $x^2 = 16 \quad |\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$|x| = 4$

$\pm x = 4$

$\sqrt{4^2} = 4$

$\sqrt{(-4)^2} = 4$

$\underline{\underline{x = \pm 4}}$

Hva med: $x^2+4x+3=0$

$$x^2+4x=-3$$

BI

Fullføring av kvadrat:

$$\underline{x^2}+\underline{4}x+\underline{4}=(x+2)^2$$

$$(x+p)^2=\underline{x^2}+\underline{2p}x+p^2 \qquad p=2 \quad (4/2)$$

$$x^2+4x \xrightarrow{\boxed{\text{fullføre kvadratet}}} x^2+4x+4=(x+2)^2$$

$\boxed{\text{halvere kvadrere addere}}$

$$x^2+4x=-3 \quad |+4$$
$$x^2+4x+4=-3+4$$
$$(x+2)^2=1$$
$$|x+2|=1$$
$$x+2=\pm 1$$
$$x=\pm 1-2 \qquad \underline{x=-1} \text{ eller } \underline{x=-3}$$

$$x^2+ax \xrightarrow[\text{fullføre kvadratet}]{} x^2+ax+(a/2)^2$$

Løsning av den generelle kvadratiske likningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a \qquad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad | - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

abc-formelen

Husk: $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$: To ulike løsninger $x_1 \neq x_2$

$\Delta = 0$: $x_1 = x_2 = -b/2a$ (dobbelrot)

$\Delta < 0$: Ingen løsning (ingen reell løsning)

Eks: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Ved abc-formelen:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2}$$

$\underline{x_1 = 4}$ $\quad x_2 = \underline{3}$

Ved å fullføre kvadratet:

$$x^2 - 7x + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x - 7/2\right)^2 = -12 + 49/4$$

$$\left(x - 7/2\right)^2 = -48/4 + 49/4 = 1/4$$

$$x - 7/2 = \pm\sqrt{1/4} = \pm 1/2$$

$$x = 7/2 \pm 1/2$$

$x_1 = \underline{4}$, $x_2 = \underline{3}$

$\underline{x = 3 , x = 4}$

Vietes formel:

$x^2 \div px + q = 0$ har løsninger x_1 og x_2

hvis og bare hvis $\quad x_1 + x_2 = +p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 3, \\ \underline{\underline{x_2 = 4}} \end{array}$

$(x-3)(x-4) = 0$

$x - 3 = 0$ eller $x - 4 = 0$

$\underline{x = 3}$ $\quad \underline{x = 4}$

$x^2 - 3x - 4x + (-3)(-4) = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Viète's formel:

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$x^2 - px + q = 0$ har løsninger x_1, x_2

$\Updownarrow$

$$x_1 + x_2 = p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

---

(2) Faktorisering av kvadratiske uttrykk:

$$ax^2 + bx + c = \underline{a} \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \qquad (a \neq 0)$$

$$= a \cdot (x - p)\cdot(x - q)$$

Hvordan finner man p og q:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x-p)\cdot(x-q) = 0$$

$a = 0$ eller $x - p = 0$ eller $x - q = 0$

$x = p$ $\qquad$ $x = q$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_1 = p$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = q$$

Oppsummering:

Faktorisering av ax^2+bx+c $\quad (a \neq 0)$

i) Løser likningen $ax^2+bx+c=0$

ii) $\Delta > 0$: $\quad ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$\Delta = 0$: $\quad ax^2+bx+c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$$= a\cdot(x-x_1)^2$$

$\Delta < 0$: $\quad ax^2+bx+c = a\cdot(x^2+b/a\,x+c/a)$

kan ikke faktoriseres i lineære faktorer

3) Likninger med parametre

Eks: Vi produserer og selger x enheter av en vare, til pris $p = 5$ kr

$$I(x) = px = 5x$$

Vi antar at kostnadsfunksjon

$$K(x) = 500+4x-0.04x^2$$
$$= 500 + x\cdot(4-0{,}04x)$$

Likning for å dekke kostnadene:

$$px = 500+4x-0{,}04x^2$$

p: parameter
x: variabel

Vi løser likningen for x for hver gitt verdi av p.

$\underline{p=5}$:

$$5x = 500 + 4x - 0.04x^2$$

$$0{,}04x^2 + x - 500 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}04 \cdot (-500)}}{0{,}08}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{0{,}08} = \frac{-1 \pm 9}{0{,}08} = \frac{8}{0{,}08} = \underline{100}$$

$\underline{\text{Generell } p}$:

$$px = 500 + 4x - 0{,}04x^2$$

$$0{,}04x^2 + (p-4)x - 500 = 0$$

$$x = \frac{-(p-4) \pm \sqrt{(p-4)^2 - 4 \cdot 0{,}04 \cdot (-500)}}{0{,}08}$$

$$= \frac{-(p-4) \pm \sqrt{(p-4)^2 + 80}}{0{,}08}$$

$$(p-4)^2 + 80 > (p-4)^2$$

$$\sqrt{(p-4)^2 + 80} > \sqrt{(p-4)^2} = p-4$$

$$= \frac{-(p-4) + \sqrt{(p-4)^2 + 80}}{0{,}08}$$

$$x(p) = \frac{\sqrt{(p-4)^2 + 80} - (p-4)}{0{,}08}$$

$\underline{p=6}$:

$$x(6) = \frac{\sqrt{84} - 2}{0{,}08} \simeq \underline{89{,}56}$$

Eks: $x^2 - (t+7)x + 10(t-3) = 0$

$$x = \frac{t+7 \pm \sqrt{(t+7)^2 - 4 \cdot 10(t-3)}}{2}$$

$$= \frac{t+7 \pm \sqrt{t^2+14t+49-40t+120}}{2}$$

$$= \frac{t+7 \pm \sqrt{t^2-26t+169}}{2}$$

$$= \frac{t+7 \pm \sqrt{(t-13)^2}}{2} = \frac{(t+7) \pm (t+13)}{2}$$

$x = \underline{t+10}$ eller $x = \underline{-3}$

(4) Polynomer og polynomiale likninger

Defn: Et <u>monom</u> har formen $a \cdot x^n$, der $a \neq 0$ er et tall og $n \geq 0$ er et heltall. Graden til ax^n er <u>n</u>.

<u>Eks:</u> x^2, $2x$, $3x^2$

<u>Husk:</u> $n=0$: $x^0 = 1$
$n=1$: $x^1 = x$

Et <u>polynom</u> er en sum av en eller flere monomer. Vi regner 0 som et polynom. Graden til et polynom er graden til monomet av høyest grad.

<u>Eks:</u>

$x+3$	polynom	grad 1
x^2-4x+7	—"—	grad 2
$3x^4-1$	—"—	grad 4

En <u>polynomiell likning</u> av grad n er en likning som har formen

$$p(x) = 0$$

der $p(x)$ er et polynom av grad n.

Eks: $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$ ← polynomiell likn. av grad 3 = tredjegradslikn.

$$x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$$

$\underline{x = 0}$ eller $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\underline{x = 3}, \ \underline{x = 1}$$

Eks: $x^6 - 4x^3 + 4 = 0$ poly. likn. av grad 6

$\underline{u = x^3}$: $x^6 - 4x^3 + 4 = 0$

$$u^2 - 4u + 4 = 0$$

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \underline{2} \quad \text{(dobbelrot)}$$

$$u = 2$$

$x^3 = 2 \qquad \underline{\underline{x = \sqrt[3]{2}}}$

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

Metoder for å løse likn. av høyere grad:

- forsøke å finne en faktorisering (f.eks. faktorisere ut x om mulig)
- gjøre et variabelskifte (f.eks. $u = x^2$ eller x^3)
- forsøke å gjette en løsning.

Generell polynomiell likning av grad n:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$a_n, \ldots, a_2, a_1, a_0$ gitte tall, $a_n \neq 0$.

Resultat:

Likningen $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

der $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ er heltall, så har vi:

Hvis $x = p$ er en heltallsløsning, så går p opp i a_0.

Eks: $x^3 - 2x + 1 = 0$ $\qquad a_0 = 1$

Mulige heltallsløsn: $x = 1$, $x = -1$

$x=1$: $1^3 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$

$x=-1$: $(-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2 \neq 0$

Konklusjon: $x = 1$ er en løsn, og eneste heltallsløsningen.

Eks: $x^3 - x + 1 = 0$ $\qquad$ ingen heltallsløsn.

$x = u+v$: $(u+v)^3 - (u+v) + 1 = 0$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - (u+v) + 1 = 0$$

$$u^3 + v^3 + 1 + 3uv(u+v) - (u+v) = 0$$

$$u^3 + v^3 + 1 + (3uv - 1)\cdot(u+v) = 0$$

$u^3 + v^3 + 1 = 0$ og $3uv - 1 = 0$ er nok.

$3uv = 1$

$u = \frac{1}{3v}$

$$\left(\frac{1}{3v}\right)^3 + v^3 + 1 = 0$$

$$\frac{1}{27u^3} + u^3 + 1 = 0 \quad \Big| \cdot 27u^3$$

$$1 + 27u^6 + 27u^3 = 0$$

$$27u^6 + 27u^3 + 1 = 0$$

$$u^3 = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4\cdot 27}}{2\cdot 27} = -\frac{27}{2\cdot 27} \pm \frac{\sqrt{1 - 4/27}\cdot\sqrt{27^2}}{2\cdot 27}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 1/27}$$

$$v^3 = -1 - u^3 = -1 - \left(-\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 1/27}\right)$$
$$= -1/2 \mp \sqrt{1/4 - 1/27}$$

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - 1/27}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} \mp \sqrt{1/4 - 1/27}}$$
$$= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} + \sqrt{1/4 - 1/27}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2} - \sqrt{1/4 - 1/27}}$$

$$\simeq -1.3247\,1796$$

$+\sqrt{*}$ i u og $-\sqrt{*}$ i v
$-\sqrt{*}$ i u og $+\sqrt{*}$ i v

to muligheter som gir samme x (bytter kun om u og v)

Metoden som er brukt ovenfor gir en formel for generelle tredjegradslikninger $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ og kalles Cardano's formel.

(Det forventes ikke at man lærer denne i kurset.)