FORELESNING 6

MET 1180 MATEMATIKK

BI

EIVIND ERIKSEN, 25 SEP, 2015

Plan:

1. Polynomdivisjon og faktorisering
2. Rasjonale og radikale løsninger
3. Ulikheter

Pensum:

[S] 3.4, 1.10, 1.6
([LE] 2.5-2.7, 2.8)

1. Polynomdivisjon og faktorisering

Polynomdivisjon = divisjon av polynomer

Eks: $(x^2-4x+3):(x-1) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

$(x^2+7x-12):(x+4) =$

Et rasjonalt uttrykk er et uttrykk på formen

$\dfrac{p(x)}{q(x)}$: $p(x), q(x)$ er polynomer

Eks:

$$
\begin{array}{l}
(x^2-4x+3):(x-1) = x-3 \\
-(x^2-x) \\
\hline
\quad -3x+3 \\
-(-3x+3) \\
\hline
\quad 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = x-3$ (rest 0)

BI

Eks: $(x^2+7x-12) : (x+4) = x+3$

$-(x^2+4x)$

$3x-12$

$-(3x+12)$

-24

Kvotient: $x+3$ Rest: -24

$$\frac{x^2+7x-12}{x+4} = x+3 + \frac{-24}{x+4}$$

Eks: $(x^3-1) : (x^2+x) = x-1$

$-(x^3+x^2)$

$-x^2-1$

$-(-x^2-x)$

$x-1$

$$\frac{x^3-1}{x^2+x} = x-1 + \frac{x-1}{x^2+x}$$

Resultat:

Dersom $p(x)$, $d(x)$ er to polynomer, finnes det en entydig $q(x)$ og en entydig rest $r(x)$ med grad mindre enn graden til $d(x)$ slik at

$$\boxed{\frac{p(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}}$$

Dessuten:

grad $q(x)$ = grad $p(x)$ − grad $d(x)$

Polynomdivisjon og faktorisering

Eks:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - x + 1 : x - 3 = x^2 + 3x + 8 \\
-(x^3 - 3x^2) \\
\hline
3x^2 - x + 1 \\
-(3x^2 - 9x \quad) \\
\hline
8x + 1 \\
-(8x - 24) \\
\hline
25
\end{array}
$$

$$\frac{x^3 - x + 1}{x - 3} = x^2 + 3x + 8 + \frac{25}{x-3}$$

Resultat:

$p(x) : (x-a)$ har rest $p(a)$. Det betyr:

$$\boxed{p(a) = 0 \iff p(x) = (x-a) \cdot q(x) \text{ for et polynom } q(x)}$$

Hvorfor er det slik:

$$\frac{p(x)}{x-a} = q(x) + \frac{r}{x-a}$$

$$p(x) = q(x) \cdot (x-a) + r$$

$\underline{x=a}$: $p(a) = q(x) \cdot 0 + r = r$

Eks: Løs $x^3 - 2x + 1 = 0$

$x = a$ er løsning $\Longleftrightarrow$ $x^3 - 2x + 1 = (x-a)\cdot q(x)$

$(p(a) = 0)$

$$\Downarrow$$

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-a)\cdot q(x) = 0$$

$$x = a \text{ eller } q(x) = 0$$

Prøver $x = \pm 1$: $1^3 - 2\cdot 1 + 1 = 0$

(går opp i $a_0 = 1$)

$x = 1$ er en løsning

$$(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = \underline{x^2 + x - 1}$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -x + 1 \\ -(-x + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} = x^2 + x - 1$$

$$\underline{x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)}$$

Løs: $x^3 - 2x + 1 = 0$

$$(x-1)\cdot(x^2 + x - 1) = 0$$

$\underline{x_1 = 1}$ eller $x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-1)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} \qquad \underline{x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}}$$

Faktorisering:

$$x^3 - 2x + 1 =$$

$$(x-1)\cdot(x - x_2)(x - x_3)$$

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \simeq \underline{0.62}$ $\qquad$ $x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \simeq \underline{-1.62}$

Eks: Faktoriser $2x^5-3x^3-5x$

$$= x\cdot(\underbrace{2x^4-3x^2-5})$$

$$2x^4-3x^2-5=0$$

$u=x^2$: $2u^2-3u-5=0$

$$u=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 7}{4}$$

$$u=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \quad \text{eller} \quad u=-1$$

irredusibel kvadratisk faktor

$$x^2=5/2 \qquad\qquad x^2=-1 \qquad x^2+1=0$$

$$x=\pm\sqrt{5/2}=\pm\sqrt{\frac{10}{4}} \qquad \text{ingen løsn}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad x_1=\frac{\sqrt{10}}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$2x^4-3x^2-5 = 2\cdot\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)(x^2+1)$$

Resultat: $2x^5-3x^3-5x = x\cdot(2x^4-3x^2-5)$

$$= x\cdot(2)\left(x-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)(x^2+1)$$

$$= x\cdot(2x-\sqrt{10})\left(x+\sqrt{10}/2\right)(x^2+1)$$

BI

Algebraens fundamentalsats

Ethvert polynom kan faktoriseres i lineære og irredusible kvadratiske faktorer.

(2) Andre likninger: Rasjonale og radikale likninger (irrasjonale)

Eks: $\frac{x}{1-x} = \frac{2}{x^2}$ $\boxed{\begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{matrix}}$ rasjonal likn. HS, VS er rasjonale uttrykk.

$$\frac{x}{1-x} = \frac{2}{x^2} \quad \Big| \cdot x^2 \cdot (1-x)$$

$$\frac{x \cdot x^2 \cdot \cancel{(1-x)}}{\cancel{1-x}} = \frac{2 \cdot \cancel{x^2} \cdot (1-x)}{\cancel{x^2}}$$

$$x^3 = 2 \cdot (1-x) = 2 - 2x$$

$$x^3 + 2x - 2 = 0$$

← polynomiell likn. (vanskelig)

Eks: $\frac{x}{1-x} = \frac{2+x}{x}$ $x \neq 0, x \neq 1$ $\Big| \cdot x(1-x)$ (kryssmultiplikasjon)

$$x^2 = (2+x)(1-x)$$

$$x^2 = 2 + x - 2x - x^2$$

$$2x^2 + x - 2 = 0 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Radikale likninger: Likninger med rotuttrykk

Eks: $\sqrt{x+1} - x = -1$

$$\boxed{\sqrt{x+1} = x-1} \qquad | \ast^2$$

$x=0$
VS = 1
HS = −1

$$\boxed{x+1 = (x-1)^2}$$

$$x+1 = x^2-2x+1$$

$x=0$:
VS = 1
HS = 1

$$0 = x^2-3x$$

$$0 = x\cdot(x-3)$$

$$\underline{x=0}\ ,\quad \underline{x=3}$$

Må sette prøve:

$x=0$ $\left\{ \begin{array}{l} VS: \sqrt{1} - 0 = 1 \\ HS: -1 \end{array} \right\}$ falsk løsn.

$x=3$ $\left| \begin{array}{l} VS: \sqrt{4} - 3 = -1 \\ HS: -1 \end{array} \right.$

Konkl: $\underline{\underline{x=3}}$ er en eneste løsning

Eks:

$$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1} \qquad | \ast^2$$

$$\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 = x+1$$

$$\cancel{x}\cancel{-1} + 2\cdot\sqrt{x-1} \cancel{+1} = \cancel{x}+1$$

$$2\sqrt{x-1} = 1$$

BI

$$2\sqrt{x-1} = 1 \qquad |*^2$$

$$(2\sqrt{x-1})^2 = 1^2$$

$$4\cdot(x-1) = 1$$

$$x-1 = 1/4$$

$$x = 1/4+1 = \underline{5/4}$$

Sette prøve: $\sqrt{x-1}+1 = \sqrt{x+1}$

$x = 5/4$: VS : $\sqrt{5/4-1}+1 = \sqrt{1/4}+1 = 1/2+1 = \underline{3/2}$

HS : $\sqrt{5/4+1} = \sqrt{9/4} = \underline{3/2}$

$x = 5/4$ er eneste løsn

Eks:

$$\sqrt[3]{x+1} = 1 \qquad |*^3$$

$$x+1 = 1^3 = 1$$

$$\underline{x=0}$$

Alle løsninger som er algebraiske men ikke rasjonale, er radikale.

(3) Ulikheter

Ulikhetstegn

$<$	mindre enn
$\leq$	mindre enn eller lik
$>$	større enn
$\geq$	større enn eller lik

Lineære ulikheter

VS, HS er lineære uttrykk

Eks: $3x - 1 < 2 \quad | +1$

$$\frac{3x}{3} < \frac{3}{3} \quad | :3$$

$$\underline{\underline{x < 1}}$$

$$\underline{\underline{x \text{ i } (-\infty, 1)}}$$

Intervallnotasjon:

$(a, b) = \langle a, b \rangle$ $\quad$ x s.a. $a < x < b$
åpent intervall

$[a, b]$ $\quad$ x s.a. $a \leq x \leq b$
lukket intervall

$(-\infty, \dots \quad = \quad (\leftarrow, \dots \quad = \quad \langle \leftarrow, \dots$

$\dots, \infty) \quad = \quad \dots, \rightarrow) \quad = \quad \dots, \rightarrow \rangle$

Lovlige operasjoner for ulikheter

* Legge til / trekke samme uttrykk på begge sider

* Mult. / dividere med uttrykk med positiv verdi på begge sider

* Multiplisere / dividere med uttrykk med negativ verdi på begge sider, og snu ulikheten

---

Eks: $1 - x < 2x + 4$

$1 < 3x + 4$

$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3}$

$-1 < x$

$x > -1$

x i $(-1, \infty)$

$1 - x - 2x < 4$

$\frac{-3x}{-3} < \frac{3}{-3}$

$x > -1$

x i $(-1, \infty)$

Ikke-lineære ulikheter

Eks: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Vi bruker fortegnsskjema.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = 1$, $x = 2$

Metode: Fortegnsskjema

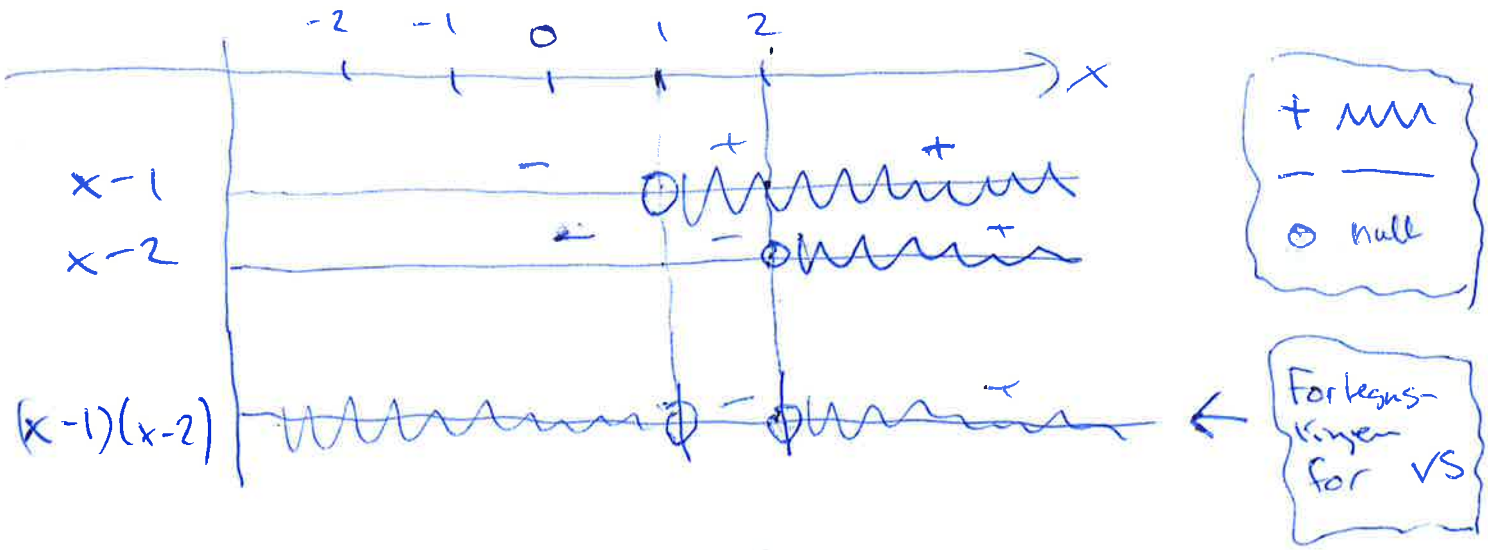
i) Flytter over ledd slik at HS = 0.

ii) Vi faktoriserer VS og lager fortegnsskjema for VS

iii) Les av løsningene.

Eks: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$$(x-1)(x-2) \geq 0$$



Løsn: VS ≥ 0 gir $x \leq 1$ eller $x \geq 2$

Eks:

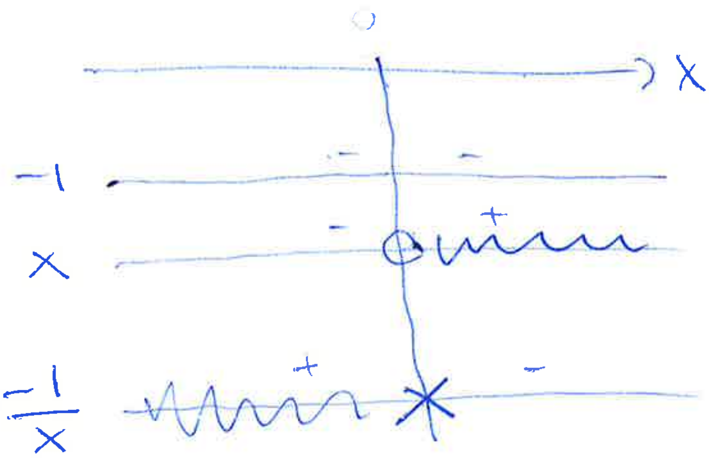
$$\frac{x-1}{x} \le 1$$

$$\frac{x-1}{x} - 1 \cdot \frac{x}{x} \le 0$$

o : nullpkt
x : ikke definert

$$\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}}{x} \le 0$$

$$\frac{-1}{x} \le 0$$



$\boxed{VS \le 0}$ $\quad$ $x > 0$

Eks:

$$\frac{3}{x} < \frac{x}{3}$$

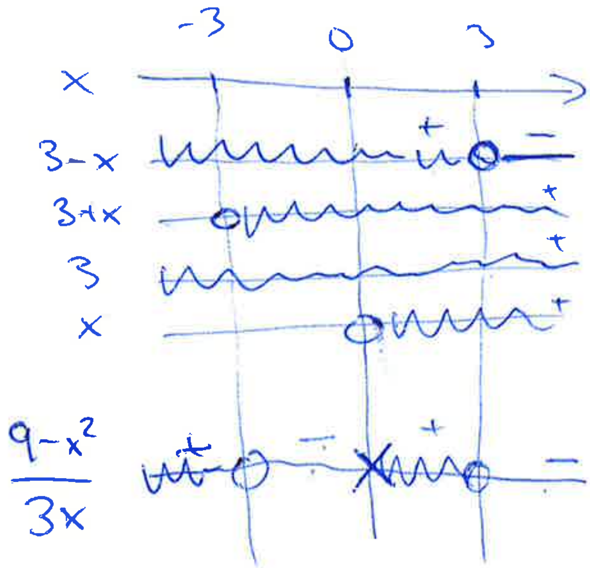
$$\frac{3}{x} - \frac{x}{3} < 0$$

$$\frac{3 \cdot 3}{x \cdot 3} - \frac{x \cdot x}{3 \cdot x} < 0$$

$$\frac{9-x^2}{3x} < 0$$

$$\frac{(3-x)(3+x)}{3x} < 0$$

$9-x^2=0$
$x^2-9=0$
$x=\pm 3$
$-(x-3)(x+3)=$
$(3-x)(x+3)$



VS<0: $-3<x<0$ eller $x>3$

$(-3,0) \cup (3,\rightarrow)$

Skrivemåte: Løsningsmengden L

$L = I_1 \cup I_2$ union $\cup$ alle løsninger som er med i I_1 eller i I_2

$L = I_1 \cap I_2$ snitt $\cap$ alle løsninger som er med i I_1 og i I_2

Eks: $-3 < x < 0$ eller $x > 3$

gir

$$\underline{\underline{L = (-3, 0) \cup (3, \rightarrow)}}$$

$-1 < x < 1$ eller $x < -3$

gir

$$\underline{\underline{L = (\leftarrow, -3) \cup (-1, 1)}}$$