FORELESNING 7

MET 1180 BI

MATEMATIKK

EIVIND ERIKSEN, SEP 30, 2015

Plan:

1. Funksjoner og grafer
2. Lineære og kvadratiske funksjoner
3. Inntekst- og kostnadsfunksjoner
4. Voksende og avtagende funksjoner

Pensum:

[S] 2.1-2.3, 3.1-3.3

([E] 3.1-3.5)
3.6

---

1 Funksjoner og grafer

Funksjoner:

Eks: $f(x) = x^2 + x - 6$ funksjonsuttrykk

f funksjon

A: $x = 1 \longrightarrow 1^2 + 1 - 6 = -4$

$x = 2 \longrightarrow 2^2 + 2 - 6 = 0$:B

Defn: En funksjon f er en regel som til ethvert element i en mengde A tilordner ett element i en mengde B (og bare ett)

A: definisjonsområde, definisjonsmengde D_f

B: Verdiområde $B = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ mengden av alle reelle tall

BI

Verdimengde: de funksjonsverdiene $f(x)$ vi kan få når $x \in D_f$ (x er med i D_f).

Funksjonsuttrykk: $f(x) = x^2 + x - 6$

regelen som bestemmer funksjonsverdien for vilkårlig x

$f(1) = -4 \qquad f(2) = 0$

De fleste funksjoner vi skal se på, har verdiområde $\mathbb{R}$ (alle reelle tall), de kalles **reelle funksjoner**.

Eks:

$$f(x) = \begin{cases} R, & x \text{ rasjonalt tall} \\ I, & x \text{ irrasjonalt tall} \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R} \qquad$ Verdiområde: $\{R, I\}$

Hvorfor skiller man mellom verdimengde og verdiområde:

Eks: $f(x) = x^2 + x - 6$

Verdiområde: $\mathbb{R}$

Verdimengde: $V_f = [-\frac{25}{4}, \rightarrow)$

h tall:

$f(x) = h$

$x^2 + x - 6 = h$

$x^2 + x - 6 - h = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 (-6-h)}}{2}$$

$\Delta = 1 + 24 + 4h = 25 + 4h \geq 0$

$\frac{4h}{4} \geq \frac{-25}{4}$

$h \geq -\frac{25}{4}$

For å spesifisere en funksjon fullstendig, må vi må vi oppgi funksjons uttrykk og defn. mengde.

Eks:

$$g(x) = \sqrt{x^2-1} \quad , \quad D_f = (\leftarrow, -1] \cup [1, \rightarrow)$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$x \geq 1$ eller $x \leq -1$

$$h(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

$$D_f = (\leftarrow, 0) \cup (0, \rightarrow)$$
$$= \{x : x \neq 0\}$$

Eks: $K(x) = 100 + 3x - 0.01x^2 \quad , \quad x \geq 0$

Funksjoner med delt forskrift:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \geq 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}$$

$f(2) = -1$
$f(1) = 0$
$f(0) = 0$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

absolutt-verdien av x

$|2| = 2$
$|-2| = 2$

Grafen til en funksjon:

f funksjon: Grafen til f er mengden av alle punkter (x,y) slik at $y=f(x)$ og x er med i def.-mengden D_f.

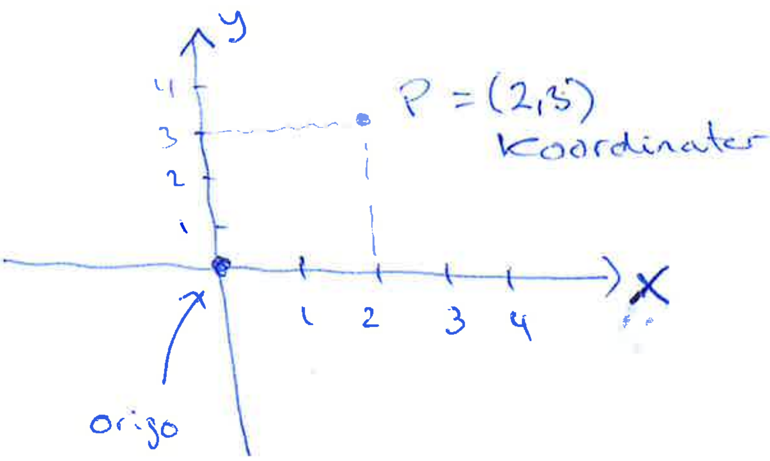
$f(x)=x^2$: Grafen til f mengden av pkt (x,y) med $y=x^2$

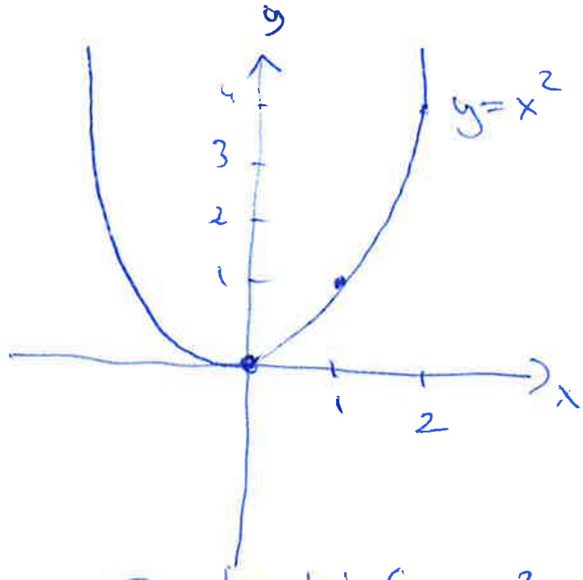
$D_f=\mathbb{R}$

dvs

(x,x^2) der x er i $\mathbb{R}$

Koordinatsystem:





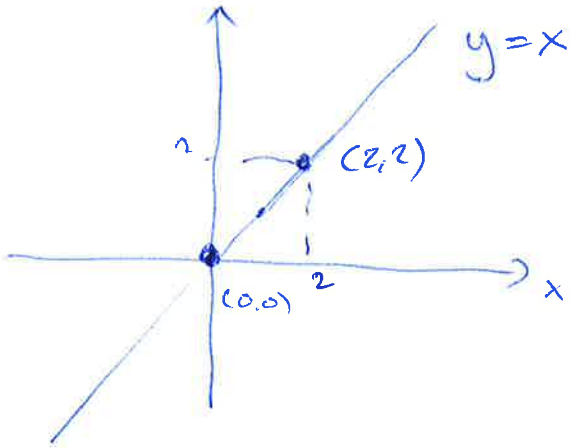
grafen til $f(x)=x^2$

For å tegne grafen til en funksjon f må vi enten vite endel om f eller så trenger vi svært mange punkter.

Eks: $f(x)=x$

$D_f=\mathbb{R}$

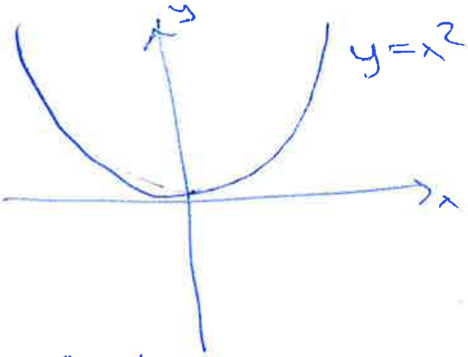
Grafen $=\{(x,x) : x \text{ i } \mathbb{R}\}$



Grafen er en rett linje

Eks: $f(x)=x^2$

$D_f=\mathbb{R}$



Grafen er en kurve.

Likninger og kurver

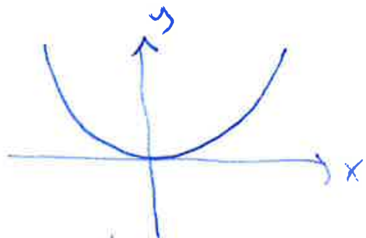
Eks: $y=x^2$ $\quad y^2=x$ $\quad x^2=y^2$

Grafisk fremstilling av likningen:

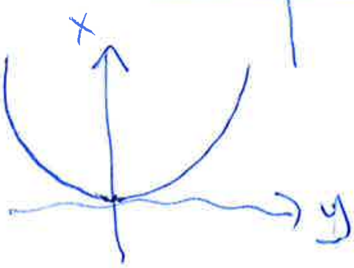
Alle punkter (x,y) som er løsning av likningen.

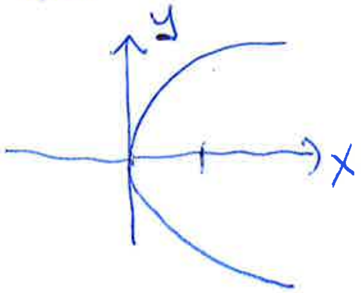
$y=x^2$: Grafen til $f(x)=x^2$

(x,x^2)

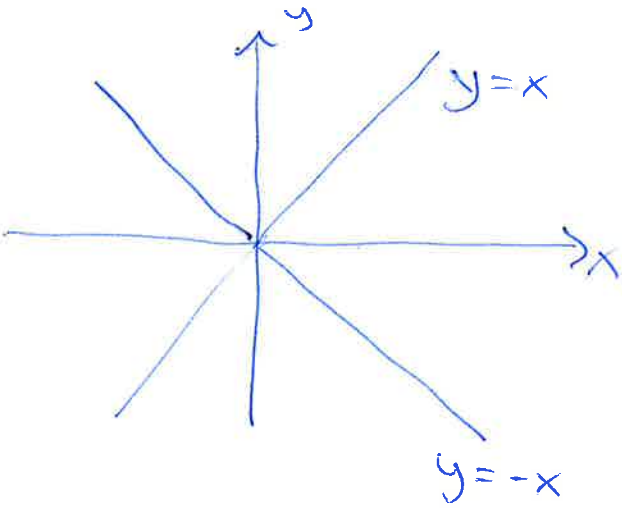


$y^2=x$ Grafen til $f(y)=y^2$ med ~~xx~~ y som første akse





$x^2 = y^2 \qquad x = y$ eller $x = -y$



dette er ikke grafen til en funksjon.

2) Lineære funksjoner

$$f(x) = \underbrace{ax+b}_{\text{lineært uttrykk}} \quad (\text{der } a, b \text{ er gitte tall})$$

Eks: $f(x) = x$, $f(x) = 2x-1$, $f(x) = 7$ (konstant)

> Grafen til en funksjon f er en rett linje hvis og bare hvis f er lineær

Eks: $f(x) = 2x-1$

$x=1$: $f(1) = 2-1 = 1$ $(1,1)$

$x=3$: $f(3) = 6-1 = 5$ $(3,5)$

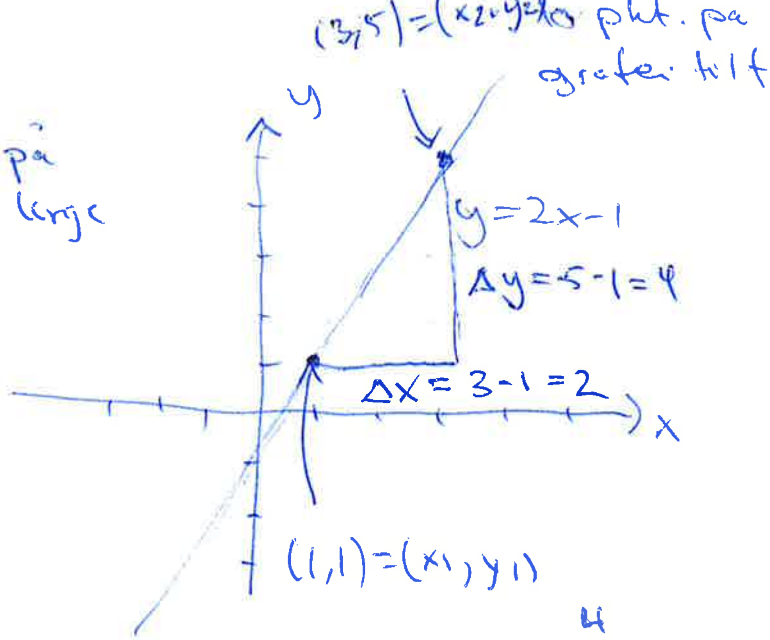
Stigningstall:

$(x_1,y_1), (x_2,y_2)$: to pkt. på en rett linje

$\|$

> **Stigningstall:**
>
> $$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

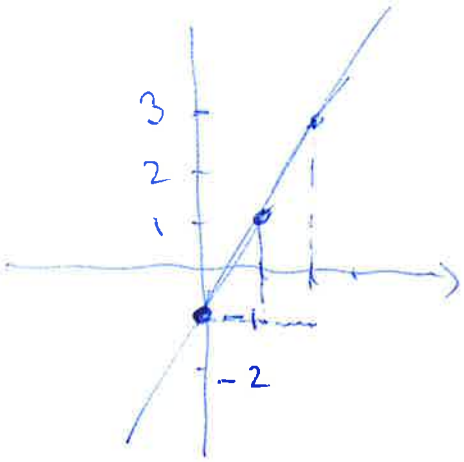
> Δ = delta betyr endring



Stigningstall $= \frac{4}{2} = \underline{2}$

Faktum: $f(x) = ax + b$ har en graf som er en rett linje, med stigningstall $\underline{a}$, og skjæringspkt. med y-aksen $\underline{b}$.

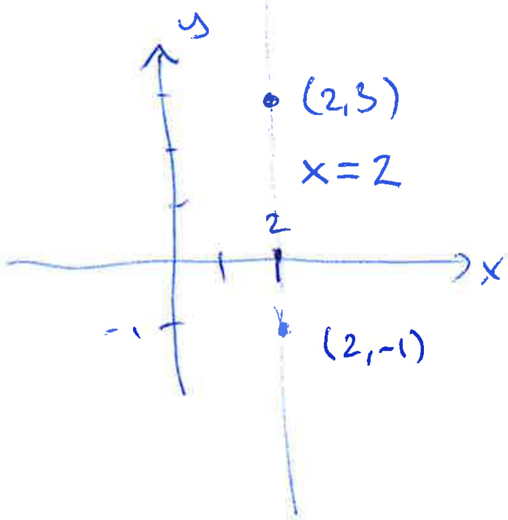
Eks: $f(x) = 2x - 1$ ← Rett linje, stign.tall $\underline{2}$
skj. punkt med y-aksen $\underline{-1}$



$\underline{x=0}$: $f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

Rette linjer som ikke er grafen til en lin. funksjon:

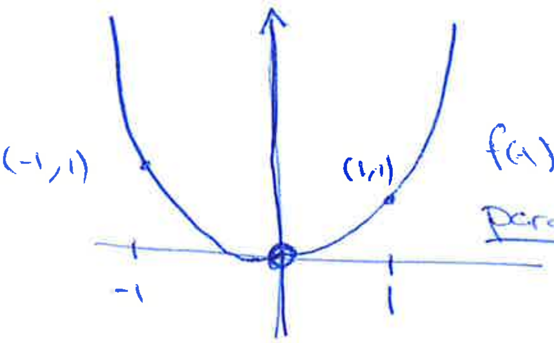
Vertikale linjer: $\underline{x = c}$ er ikke grafen til en funksjon.



Kvadratiske funksjoner:

$$f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{kvadratisk uttrykk}}$$ (a,b,c gitte tall, $a \neq 0$)

Eks: $f(x) = x^2$



$x = 0$

$f(x) = x^2$

parabel

i) symmetri-linje: y-aksen, dvs $x = 0$

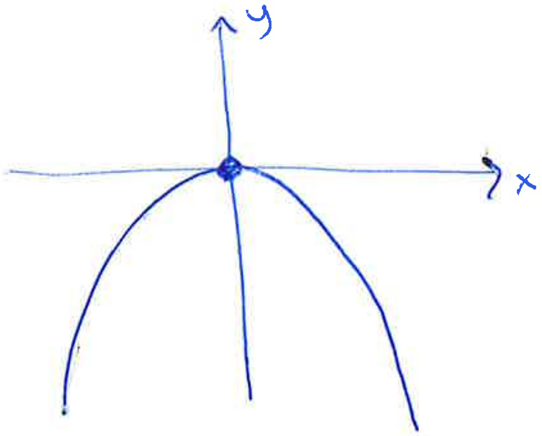
$f(-x) = f(x)$

ii) krumning ∪

iii) punktet på grafen og symmetri-linjen er et bunnpkt

(generelt om $a > 0$)

Eks: $f(x) = -x^2$



Når $a < 0$: ∩

punktet på grafen og symmetrilinjen er topp-pkt

Eks: $f(x) = x^2 + x - 6$

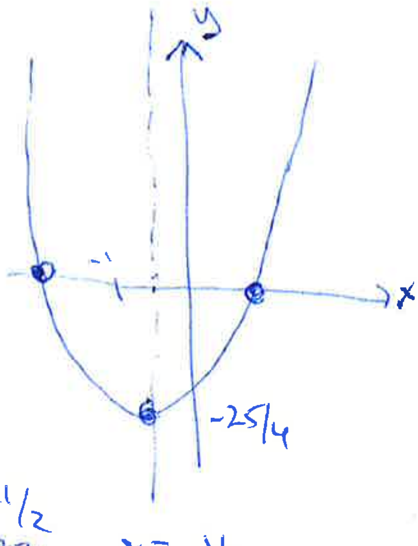
$= (x^2 + x + 1/4) - 6 - 1/4$

$= (x + 1/2)^2 + \left(\frac{-24-1}{4}\right)$

$= (x + 1/2)^2 - \frac{25}{4}$

$\{f(x) = x^2\}$

Symmetrilinje: $x = -1/2$ bunnpkt: $x = -1/2$, $y = -25/4$



$x = -1/2$

Alternativ:

Nullpkt. for $f(x) = x^2 + x - 6$

$f(x) = 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \qquad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \underline{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} \qquad x_2 = \underline{-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}}$

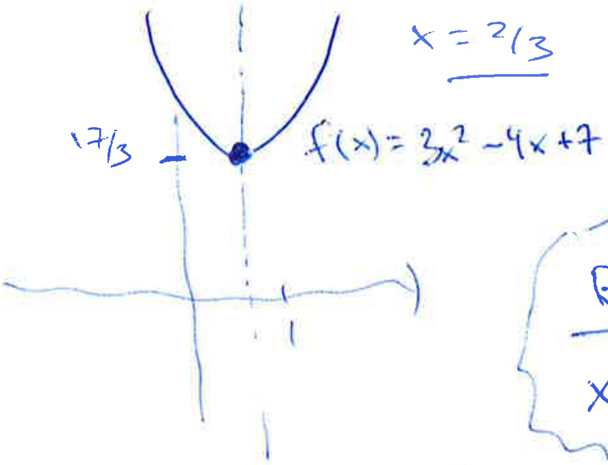
Symmetrilinje: $\underline{\underline{x = -\frac{1}{2}}}$

$$\boxed{\text{Symmetrilinjen for } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ er } \quad x = -\frac{b}{2a}}$$

abc: $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\;\cdots}}{2a}$

Eks: $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$

symmetri: $x = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 3} = 4/6 = 2/3$



$\underline{x = 2/3}$

$f(2/3) = 3 \cdot (2/3)^2 - 4 \cdot (2/3) + 7$

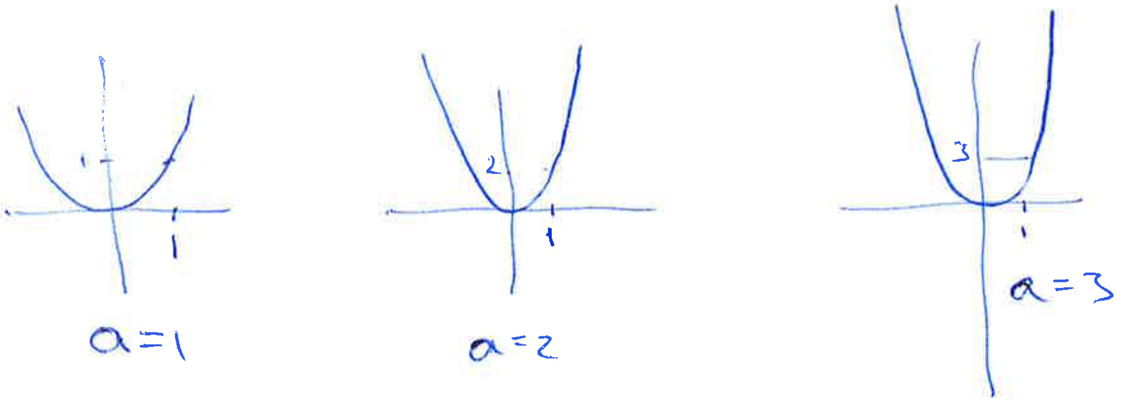
$= 4/3 - 8/3 + 7$

$= 7 - 4/3 = \dfrac{21 - 4}{3}$

$= \underline{17/3}$

Bunnpkt:

$x = 2/3 \quad y = \underline{17/3}$



(3) Inntekts- og kostnadsfunksjoner

Eko: $I(x) = px = 250x \ , \ x \geq 0$

$(p \text{ pris})$

$K(x) = K_0 + v \cdot x = 5000 + 210x \ , \ x \geq 0$

(K_0 faste kostnader
v variable kostnader per enhet)

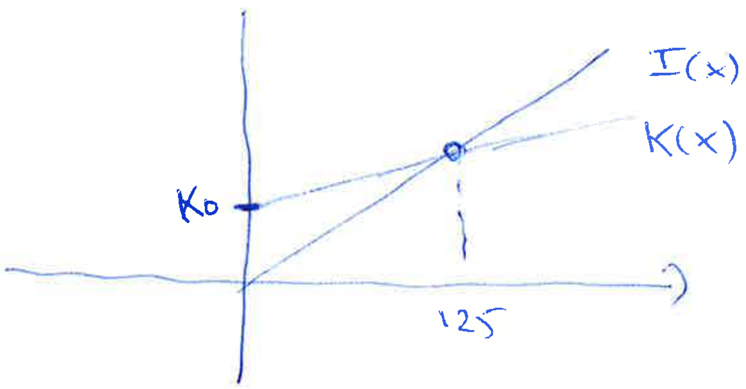
$$\pi(x) = I(x) - K(x) = px - (K_0 + vx)$$

$$= (p-v)x - K_0$$

$$= 40x - 5000 \ , \ x \geq 0$$

$\pi(x) = 0$ $\quad 40x - 5000 = 0$

$$x = \frac{5000}{40} = 125$$



Kvadratiske kostnadsfunksjoner

$$K(x) = F + v(x)\cdot x$$
$$= F + (a+bx)\cdot x$$
$$= F + ax + bx^2$$

med $v(x) = a + bx$, variabel kostnad per enhet

Eks: $K(x) = 1500 + 12x - 0{,}03x^2$

$$= 1500 + x\cdot \underbrace{(12 - 0{,}03x)}_{v(x)}$$

tolkes som variable kostnader per enhet

$$I(x) = 20x$$

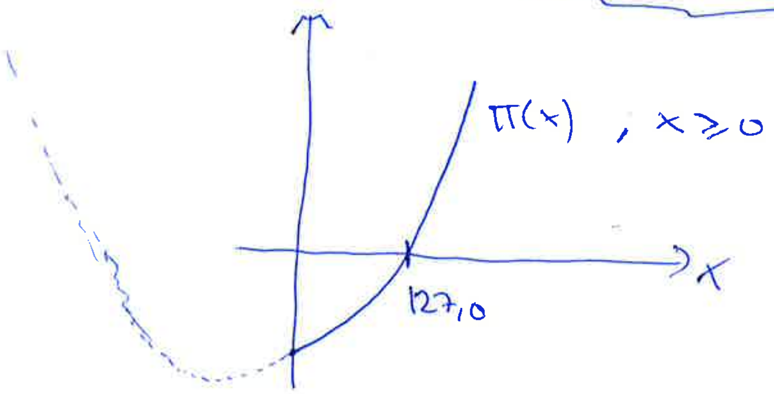
$$\pi(x) = I(x) - K(x) = 20x - (1500 + 12x - 0{,}03x^2)$$

$$= \underline{0{,}03x^2 + 8x - 1500}$$

$\pi(x) = 0$: $\quad x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 0{,}03\cdot(-1500)}}{2\cdot 0{,}03}$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{244}}{0{,}06} = \frac{-8 + \sqrt{244}}{0{,}06} \simeq \underline{127{,}0}$$

kun interessert i løsn. med $x \geq 0$



(4) Voksende og avtagende funksjoner

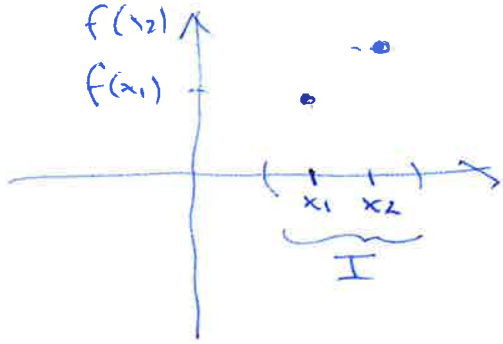
f funksjon
I intervall

Def. f er <u>voksende</u> på I hvis

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
i I

f er <u>strengt voksende</u> hvis

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
i I



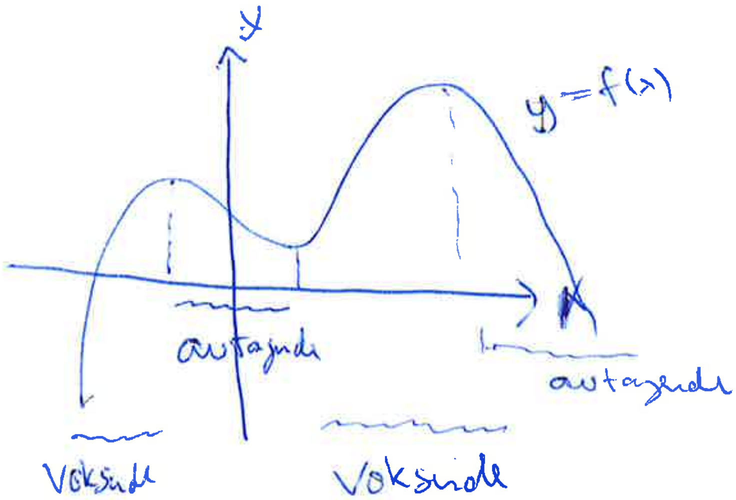
voksende = monotont voksende

Def. f er <u>avtagende</u> (monotont avtagende) på I hvis

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
i I

og ~~monoto~~ strengt avtagende på I hvis

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$
i I

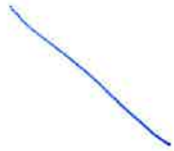


Vi kan lett se fra grafen hvor funksjonen er voksende og hvor den er avtagende.
=
Monotoni-egenskaper

Lineære funksjoner: $f(x)=ax+b$

Voksende overalt hvis $a \geq 0$

Strengt voksende overalt hvis $a>0$



avtagende overalt hvis $a \leq 0$

Strengt avtagende overall hvis $a<0$

Kvadratisk funksjon: $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$

$a>0$:

$x=-b/2a$

Avtagende i $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ ← strengt avtagende

Voksende i $[-\frac{b}{2a}, \infty)$ ← strengt voksende

$a<0$:

$x=-b/2a$

Voksende (strengt voksende) i $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$

avtagende (strengt avtagende) i $[-\frac{b}{2a}, \infty)$