FORELESNING 8 — MET 1180 MATEMATIKK

Eivind Eriksen / OKT 9 2015

Plan:

1. Sirkler og ellipser
2. Polynomielle og rasjonelle funksjoner
3. Kontinuitet (utsatt til neste uke)

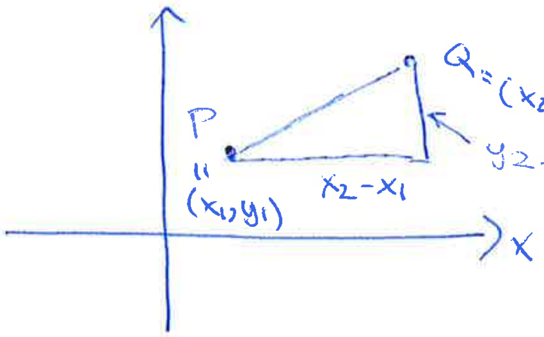
Pensum:

[S] 3.4–3.5, 6.1

([E] 3.7–3.10)

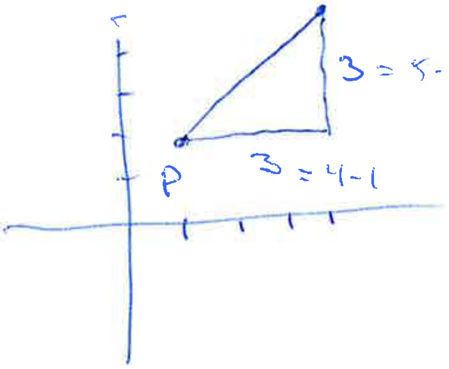
① Sirkler og ellipser

Avstand mellom punkter:



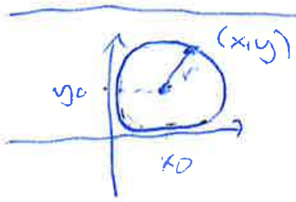
$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Eks: $P=(1,2)$ $Q=(4,5)$



$$d(P,Q) = \sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \simeq \underline{4{,}2}$$

Sirkelen med senter i (x_0,y_0) og radius $r>0$:



Alle punkt (x,y) slik at

$$d\big((x,y),(x_0,y_0)\big) = r$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$$

Likningen for en sirkel med sentrum (x_0, y_0) og radius $r>0$.

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2}$$

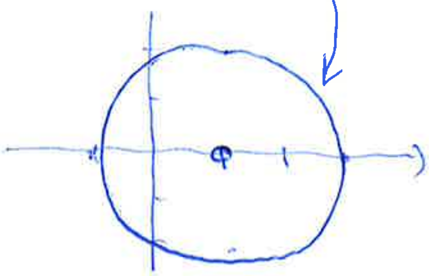
Sentrum i origo: $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$x^2+y^2=r^2$$

$$x^2-2x+1+y^2=4 \quad x^2+y^2=2x+3$$

Eks: $(x-1)^2+y^2=4$

Sirkel med radius 2 og senter i $(1,0)$

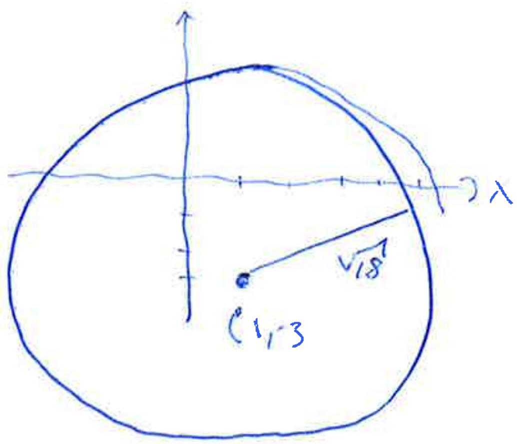


Eks: $x^2+y^2=2x-6y+8$

$$(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=8+1+9$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=18$$

Sirkel med senter i $(1,-3)$ og radius $\sqrt{18}$



Eks:

$$x^2 + y^2 = 3x - 4y - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 3x + (3/2)^2 \\ \quad + y^2 + 4y + 4 \end{array}\right\} = -1 + (3/2)^2 + 4$$

$$(x - 3/2)^2 + (y+2)^2 = 3 + 9/4 = \frac{21}{4}$$

Sirkel senter $(3/2, -2)$

radius $\sqrt{21/4} = \underline{\sqrt{21}/2}$

Oppsummering:

Rette linjer:

$$\left.\begin{array}{ll} y = ax + b & \text{(ikke vertikal)} \\ x = c & \text{(vertikal)} \end{array}\right\} \text{likninger som er lineære i } x \text{ og } y$$

$$\Updownarrow$$

$$ax + by = c$$

Parabler:

$y = ax^2 + bx + c$ 

$x = ay^2 + by + c$ 

Sirkler:

$x^2 + y^2 = ax + by + c$ 

Eks: $x^2+4y^2=6x-16y-21$

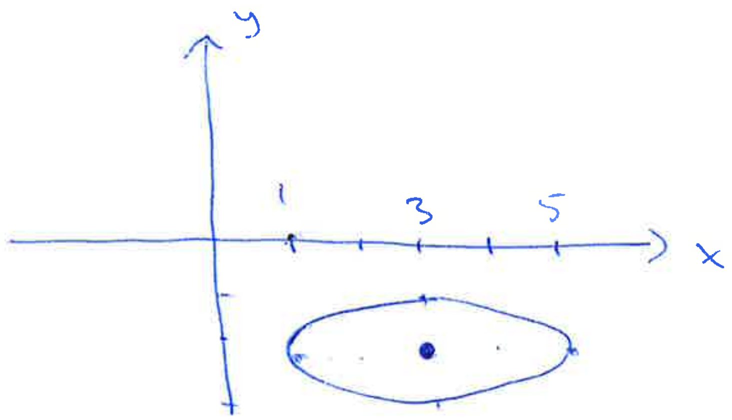
$$x^2-6x+9 \quad + \underbrace{4y^2+16y+16}_{4(y^2+4y+4)} = -21+9+16$$

$$(x-3)^2 + 4\cdot(y+2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

a^2 b^2

En ellipse med senter i $(3,-2)$ og halvakser $a=2$, $b=1$



Sirkel med senter $(3,-2)$ og radius 1 strukket med faktor

$a=2$ i x-retn.
$b=1$ i y-retn

Likningen til en ellipse med sentrum i (x_0,y_0) og halvakser a (i x-retn.) og b (i y-retn.) er

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

$px^2+qy^2=ax+by+c$ med $p,q>0$

(2) Polynomielle og rasjonale funksjoner

En funksjon f er <u>polynomial</u> hvis

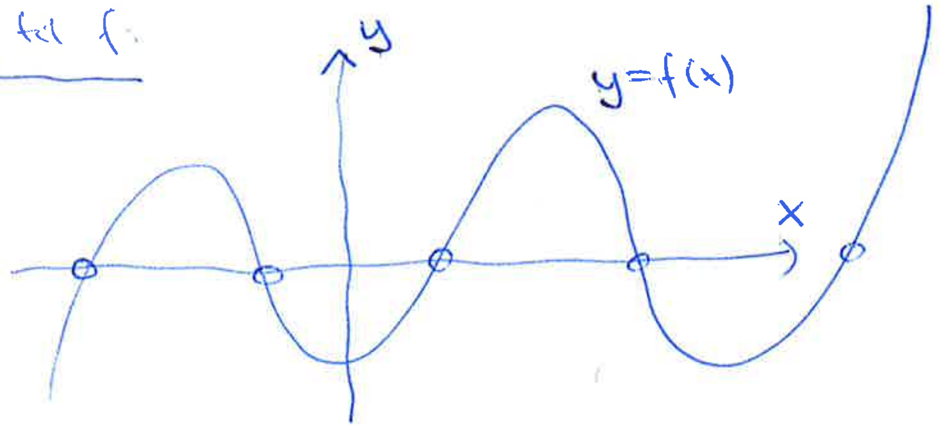
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

der n er et positivt heltall (eller 0) $n = 0, 1, 2, \dots$
og $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ er gitte tall.
Hvis $a_n \neq 0$, så kalles f en polynomial funksjon av <u>grad n</u>.

<u>Eks:</u> $f(x) = x^3 - x + 1$ grad 3
$f(x) = 2x^5 - x^4 + x - 3$ grad 5

Grad 1: Lineær funksjon
Grad 2: Kvadratisk funksjon

<u>Grafen til f:</u>



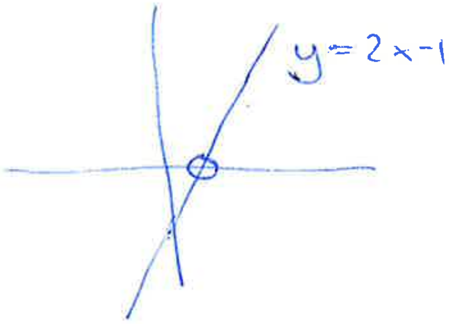
<u>Nullpunkter.</u> Et nullpunkt for f er et punkt slik at $f(x) = 0$. Altså skjæringspkt. med x-aksen.

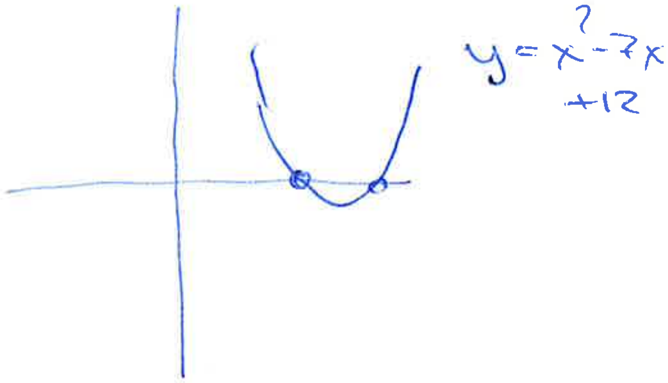
Eks: $f(x) = 2x - 1 = 0 \qquad x = 1/2$

$$f(x) = x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$x = 4,\ 3$$





Eks: $f(x) = x^3 - 6x + 5 = 0$

Heltallsløsn: $a_0 = 5$ → Mulige heltallsløsn: $\pm 1, \pm 5$

$x = 1$: $1 - 6 + 5 = 0$ ok

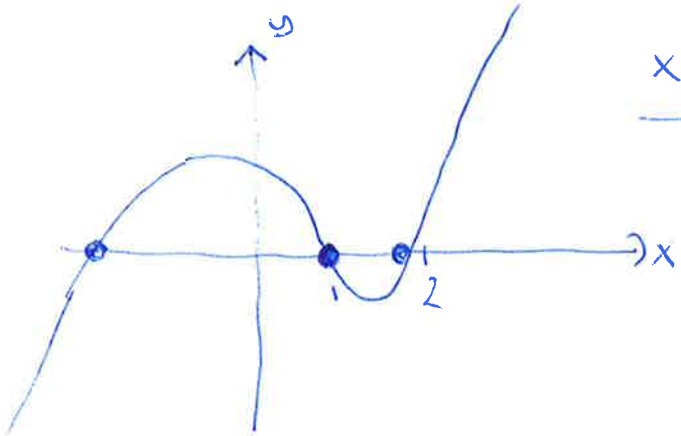
$$(x^3 - 6x + 5) = (x-1)\cdot(x^2 + x - 5) = 0$$

$$(x^3 - 6x + 5) : (x - 1) = x^2 + x - 5$$
$$-(x^3 - x^2)$$
$$x^2 - 6x + 5$$
$$-(x^2 - x)$$
$$-5x + 5$$
$$-(-5x + 5)$$
$$0$$

$x = 1$ eller $x^2 + x - 5 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$



BI

En polynomial funksjon f av grad n:

f(x) har en faktorisering i lineære faktorer og irredusible kvadratiske faktorer

$$f(x) = a \cdot (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \leftarrow$$ bare lineære faktorer

$$f(x)=0 \iff x=x_1, x=x_2, \ldots, x=x_n$$

(n nullpkt.)

Konklusjon:

En polynomfunksjon av grad n har n eller færre nullpkt.

Rasjonale funksjoner

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$, der p(x), q(x) er polynomer

Eks: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x-12}$ $g(x) = \dfrac{x-1}{3+x}$

defn. for $x \neq -3$

Definisjonsområde:

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ er definert for x slik at $q(x) \neq 0$

Eks:

D_f: $x^2+3x-12 \neq 0$

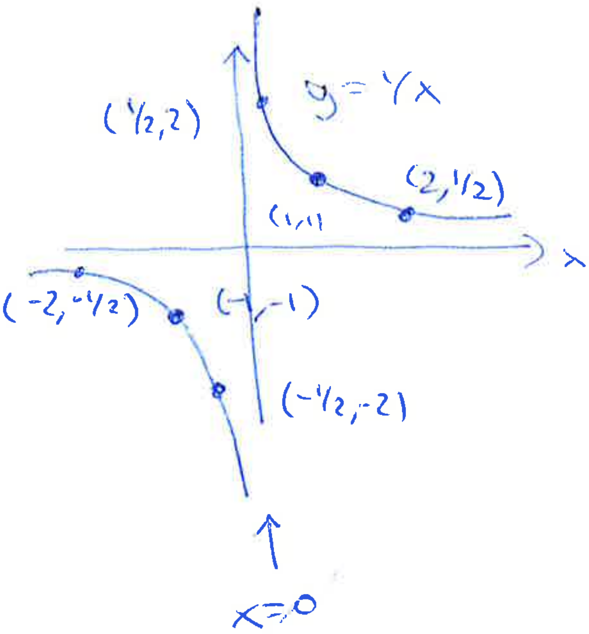
$$x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

$$x^2+3x-12=0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+48}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

Eks: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$



$y = \frac{1}{x}$

$xy = 1$

Grafen til $f(x) = 1/x$ kalles en hyperbel.

Eks: $f(x) = \frac{x-1}{3+x}$ $\quad y = \frac{x-1}{3+x}$

Polynomdivisjon:

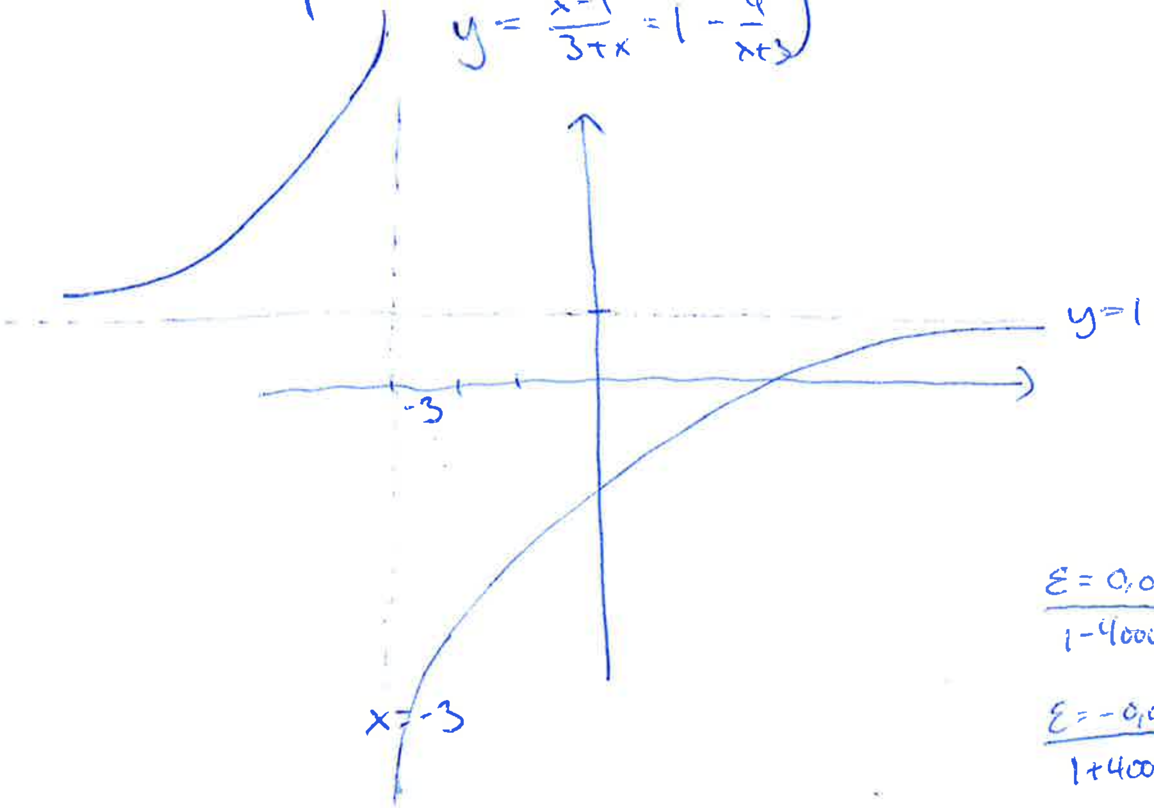
$$(x-1) : (x+3) = 1$$
$$-(x+3)$$
$$-4$$

$f(x) =$

$$\frac{x-1}{x+3} = 1 + \frac{-4}{x+3},$$

$x \neq -3$

$y = \frac{x-1}{3+x} = 1 - \frac{4}{x+3}$



Hjelpelinjen $x = -3$ og $y = 1$ kalles asymptoter.

$x = -3 + \varepsilon$ (med $\varepsilon \neq 0$ liten)

$f(x) = 1 + \frac{-4}{\varepsilon}$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \frac{-4}{\varepsilon} \to \pm\infty$

$\varepsilon = 0{,}001$: $1 - 4000$

$\varepsilon = -0{,}001$: $1 + 4000$

Asymptoter for $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$

BI

Vertikale asymptoter: $x = a$

Defn: $x=a$ er en vertikal asymptote dersom grafen til f er svært nær $x=a$ når $x \to a$.

$\Updownarrow$

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \iff \boxed{\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty}$

Eks: $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$, $x \neq -1$

Hva skjer når $x \to -1$?

$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ $\to (-1)^2-3(-1)+2 = 6$, $\to (-1)+1=0$

$= \pm\infty$

Konklusjon: $x=-1$ er en vertikal asymptote

Generelt:

$$\boxed{\begin{array}{c} x=a \text{ er en vertikal asymptote for } f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \\ \Updownarrow \\ q(a)=0 \text{ og } p(a) \neq 0 \end{array}}$$

Defn: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ hvis $f(x)$ er nærmere L jo nærmere x er a.

Dvs: For enhver $\varepsilon > 0$, så fins det et tall $\delta > 0$ slik at

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

Hvordan regner vi ut grenseverdier:

$$\lim_{x \to 1} (x+2) = 1+2 = \underline{3}$$

$$\lim_{x \to 4} x^2 - 2x + 3 = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = \underline{11}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x+1 \nearrow 5}{x-4 \to 0} = \pm \infty$$

$x = 4 + \varepsilon \quad : (\varepsilon \neq 0)$

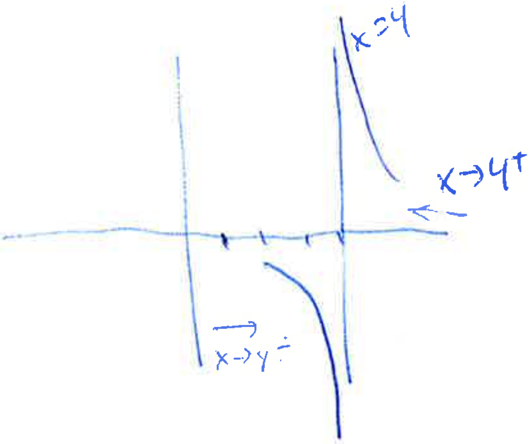
$$\frac{x+1}{x-4} = \frac{4+\varepsilon+1}{4+\varepsilon-4} = \frac{5+\varepsilon}{\varepsilon}$$

$\varepsilon = 0.001$: $\frac{5{,}001}{0{,}001} = 5001$

ensidige grenseverdier

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x+1}{x-4} = \infty \quad \left(\frac{5}{+0}\right)$$

$$\lim_{x \to 4^{\div}} \frac{x+1}{x-4} = -\infty \quad \left(\frac{5}{\div 0}\right)$$



Eks: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$ "$\dfrac{0}{0}$"

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x-3)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x-3 = \underline{-2}$$

$x=1$ er <u>ikke</u> asymptote for $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$

Horisontale og skrå asymptoter

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

rest

utfører polynomdivisjon

kvotient

Per defn. av polynomdivisjon, så har resten $r(x)$ mindre grad enn $q(x)$. Det betyr:

$\dfrac{r(x)}{q(x)} \to 0$ når $x \to \pm\infty$ $\Longrightarrow$ $y = L(x)$ er en asymptote dersom $L(x)$ er lineær

Eks: $$f(x) = \frac{x^2-3x+7}{x-2} = \underbrace{x-1}_{L(x)} + \underbrace{\frac{5}{x-2}}_{\to 0}$$

Asymptote $\underline{y = x-1}$.

$$(x^2-3x+7):(x-2) = x-1$$
$$\frac{-(x^2-2x)}{-x+7}$$
$$\frac{-(-x+2)}{5}$$

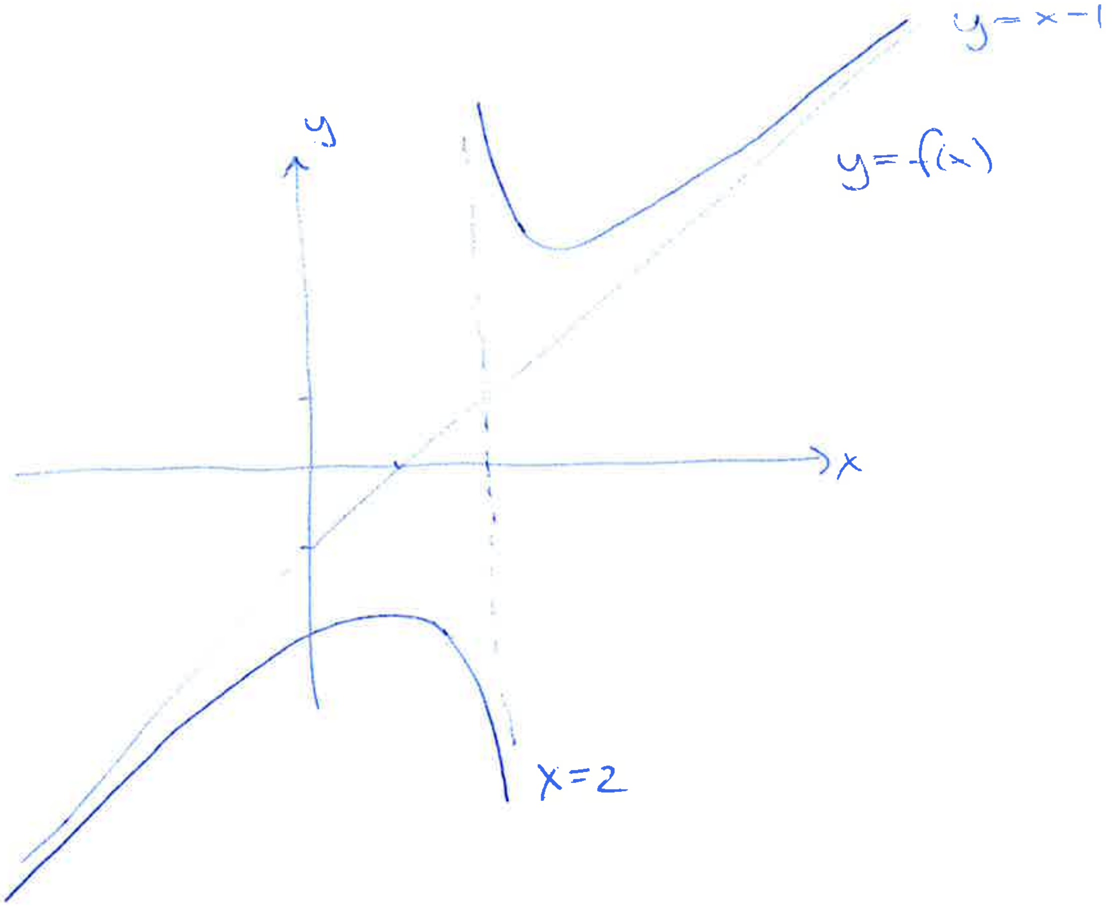
Hva skjer med $\dfrac{5}{x+2}$ når $x \to \pm\infty$?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5/x}{1-2/x} = \frac{0}{1-0} = 0$$

Eks: $f(x) = \frac{x^2-3x+7}{x-2} = x-1+\frac{5}{x-2}$

Vertikal asymptote: $x=2$ $\quad$ "$\frac{5}{0}$"

Horisontal/skrå asymptote: $y=x-1$ (skrå) $\quad x-1+\frac{\text{"}5\text{"}}{\infty}$ $\quad x-1+\frac{\text{"}5\text{"}}{-\infty}$



Husk: $\frac{p(x)}{q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

$L(x)$ lineær $\iff$ grad til L = grad til p − grad til q ≤ 1

Eks: $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ $\quad L(x)$ har grad 0 $\quad \underline{L(x)=1}$

$f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+1}$ $\quad L(x)$ grad 1 $\quad \underline{L(x)=x-3}$