FORELESNING 9

MET1180

BI

EIVIND ERIKSEN, OKT 14 2015

MATEMATIKK

Plan:

1. Kontinuitet
2. Sammensatte og omvendte funksjoner
3. Eksponentialfunksjoner
4. Logaritmer

Pensum:

[S] 3.6–3.8

([E] 3.10–3.13)

1 Kontinuitet

Defn: En funksjon f er kontinuerlig i $x=a$ dersom

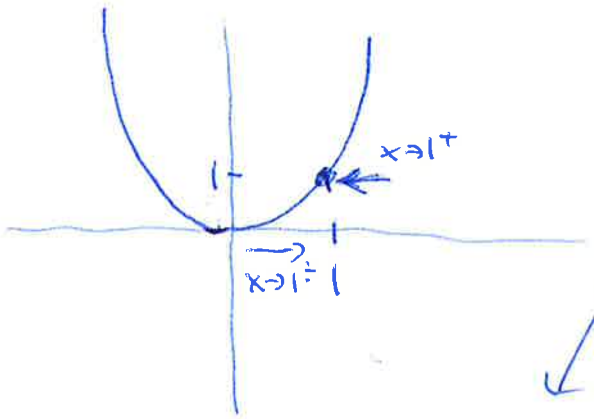
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

dvs

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

En funksjon er kontinuerlig hvis den er kontinuerlig i alle punkter hvor den er definert.

Eks: $f(x) = x^2$ i $x = 1$



$f(1) = \underline{1}$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \underline{1}$ $\quad \lim_{x \to 1^÷} f(x) = \underline{1}$

fordi: $x = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (lite)

$$f(x) = (1+\varepsilon)^2 = 1 + \underset{\downarrow \atop 0}{2\varepsilon} + \underset{\downarrow \atop 0}{\varepsilon^2} \to 1$$

$x = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (lite)

$$f(x) = (1-\varepsilon)^2 = 1 - \underset{\downarrow \atop 0}{2\varepsilon} + \underset{\downarrow \atop 0}{\varepsilon^2} \to 1$$

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^÷} f(x)$$

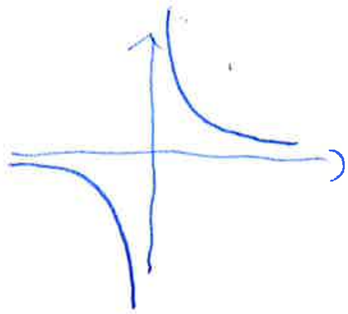
betyr at

<u>f er kont. i $x = 1$</u>

Resultat:

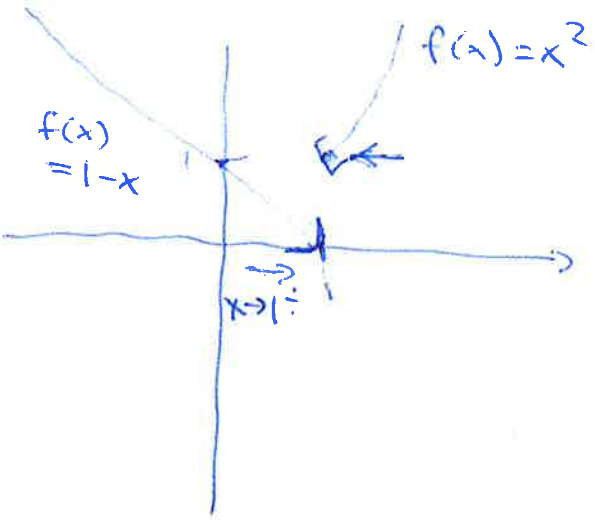
Alle "vanlige" funksjoner er <u>kontinuerlige</u>. Dette inkluderer polynomer, rasjonale eller der funksjonsuttrykket er et algebraisk uttrykk.

Vanlig misforståelse: $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$ er <u>kont.</u>



Eks: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$

delt forskrift der x^2, $1-x$ er kontinuerlige for seg



Hva med $x=1$?

$f(1) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$

For funksjoner med delt forskrift må vi sjekke kontinuitet i sammenføyningspunktene

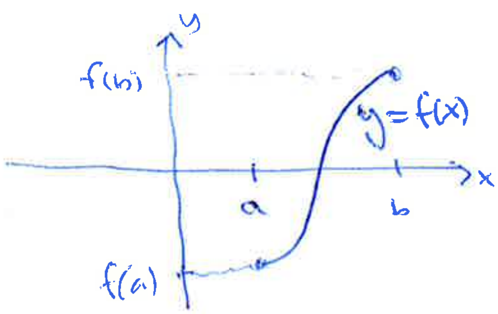
f er ikke kont. i $x=1$

$x=1$ kalles diskontinuitet

f er kont. for $x>1$ og for $x<1$

Skjæringssetningen:

Hvis $f(x)$ er kont. på intervallet $[a,b]$ og $\begin{vmatrix} f(a)<0, \; f(b)>0 \\ \text{eller} \\ f(a)>0, \; f(b)<0 \end{vmatrix}$, så fins en $x \in (a,b)$ slik at $f(x)=0$



Eks: $f(x) = x^3 - x + 1$ (kontinuerlig)

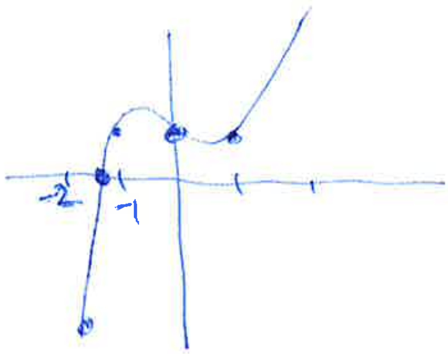
Finn Nullpkt for f:

$$f(x) = x^3 - x + 1 = 0$$

Vanskelig å løse denne likn. ved regning.

$f(-2) = -5$ $f(-1) = 1$ $f(0) = 1$ $f(1) = 1$

Skjæringssetningen: Det finnes et nullpkt mellom $x = -2$ og $x = -1$



$$f(-1.5) = -1.5 \cdot 2.25 + 1.5 + 1$$

$$= 2.5 - 3.375 < 0$$

$$\Downarrow$$

$f(-1{,}5) < 0$ $f(-1) = 1 > 0$

nullpkt ligger mellom

$-1{,}5$ og -1

② Sammensatte og omvendte funksjoner

Sammensetning av funksjoner:

Eks:

$$f(x) = 2x+3$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\cdot\sqrt{x} + 3$$

$$x \longrightarrow \boxed{\;g\;} \xrightarrow{\sqrt{x}} \boxed{\;f\;} \xrightarrow{2\sqrt{x}+3}$$

indre funksjon, kjerne — ytre funksjon

$$g(f(x)) = g(2x+3) = \sqrt{\underbrace{2x+3}_{\text{kjerne}}}$$

> Dersom $u(x)$ er kjerne eller indre funksjon, og $h = h(u)$ er ytre funksjon, så er sammensetningen
>
> $$h(u(x)) \quad \text{eller} \quad h(u), \text{ der } u = u(x)$$
>
> definert når V_u er med i D_h.

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ kan vi tenke på som en sammensatt funksjon med kjerne

$V_u = [1, \infty) \rightarrow u(x) = x^2+1$

og ytre funksjon

$D_h = [0, \infty) \rightarrow h(u) = \sqrt{u}$

Eks: $f(x) = \sqrt{\underbrace{1-x}_{\substack{u(x) \\ \text{indre}}}}$

kjerne
$u(x) = 1-x$

$h(u) = \sqrt{u}$
ytre

$\underline{D_f = (-\infty, 1]}$

$V_u = (-\infty, \infty)$

$D_h = [0, \infty)$

$u(x) = 1-x, \quad x \leq 1$

$u \geq 0$

$1-x \geq 0$

$x \leq 1$

$D_u = (-\infty, 1]$

$V_u = [0, \infty)$ $\quad \underline{D_h = [0, \infty)}$

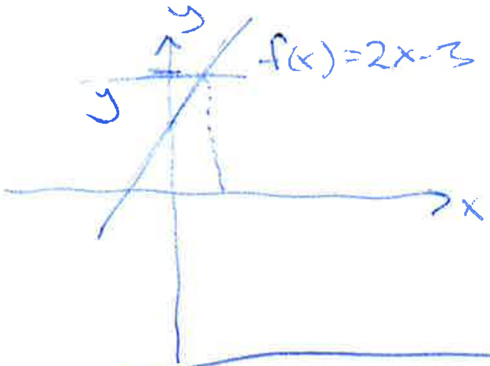
Omvendte funksjoner:

$f(x)$ funksjon med $y = f(x)$

En omvendt funksjon (invers funksjon) for f er en funksjon $g(y)$ slik at

$$g(f(x)) = x \quad \text{og} \quad f(g(y)) = y$$

Eks: $f(x) = 2x - 3$



$g(y) = \frac{y+3}{2}$ er den omvendte funksjonen til f

$y = 2x - 3$

Løses for x:

$$y = 2x - 3$$

$$\frac{y+3}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x = \frac{y+3}{2}$$

Vi skriver det ofte slik:

$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ er den omvendte funksjonen til $f(x) = 2x - 3$

Vi kan sjekke at $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$ er den omvendte til $f(x)=2x-3$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x-3) = \frac{(2x-3)+3}{2}$$

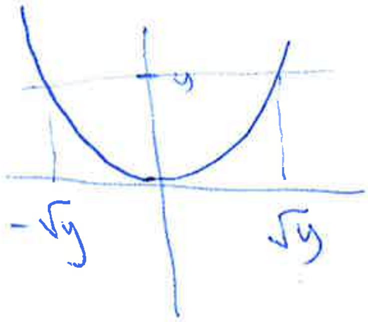
$$= \frac{2x}{2} = \underline{x}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+3}{2}\right) = \cancel{2}\,\frac{x+3}{\cancel{2}} - 3$$

$$= x+3-3 = \underline{x}$$

<u>ok</u>

<u>Eks:</u> $f(x)=x^2$



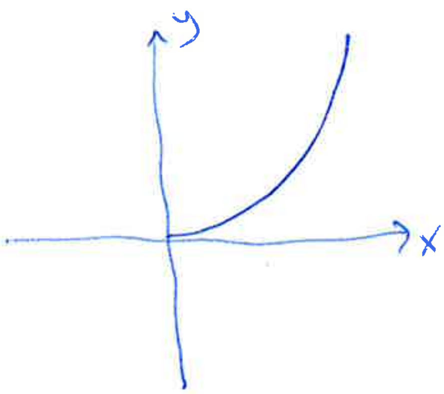
$y=x^2$ ← løser for x

$x=\pm\sqrt{y}$

Det finnes ingen omvendt funksjon.

$f(x)=x^2,\quad x\geq 0$

$D_f=[0,\infty)$



$y=x^2$

$x=\sqrt{y}$

$g(y)=\sqrt{y}$

$\underline{f^{-1}(x)=\sqrt{x}}$

$f(x)=x^2,\ x\geq 0$ og $f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$ er omvendte funksjoner

$D_f=[0,\infty)$

$V_f=[0,\infty)$

$D_{f^{-1}}=[0,\infty)$

$V_{f^{-1}}=[0,\infty)$

En funksjon f kalles <u>injektiv</u> eller 1-1 dersom

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

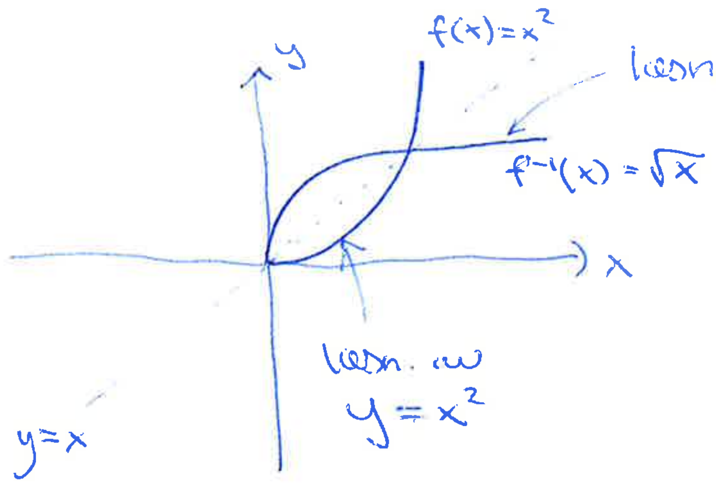
eller (med andre ord)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

En funksjon f har en <u>omvendt funksjon</u> hvis og bare hvis den er injektiv. I så fall:

i) $D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$

ii) Grafen til $y = f^{-1}(x)$ er speilbildet av grafen til $y = f(x)$ om linja $y = x$.



løsn: av $y=\sqrt{x}$

$\Updownarrow$

$y^2 = x$

<u>Kriterie for at den omvendte funksjon finnes.</u>

<u>Eks:</u> $f(x) = x^3 + x - 4$ $\qquad$ $y = x^3 + x - 4$

løs for x ← <u>vanskelig</u>

> Hvis f er strengt voksende eller strengt avtagende, så har den en omvendt funksjon.

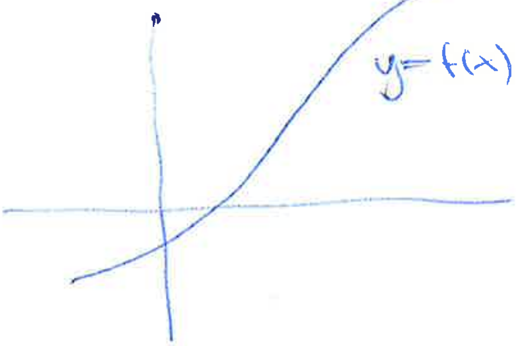
$f(x) = x^3 + x - 4$

er strengt voksende

$\Downarrow$

da har en omvendt funksjon

$f^{-1}(x)$



$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3 Eksponentialfunksjoner

Potensfunksjoner:

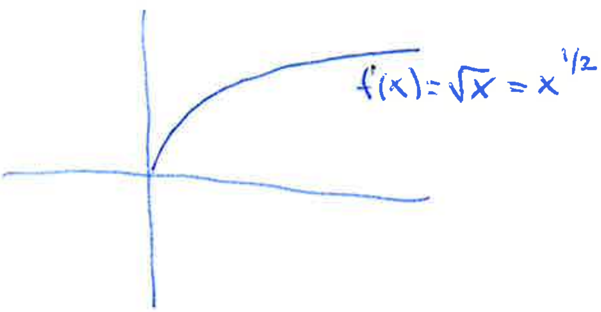
$f(x) = x^a$, $x \geq 0$

der a er et fast tall

$f(x) = x^2$, for alle x

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, for $x \neq 0$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

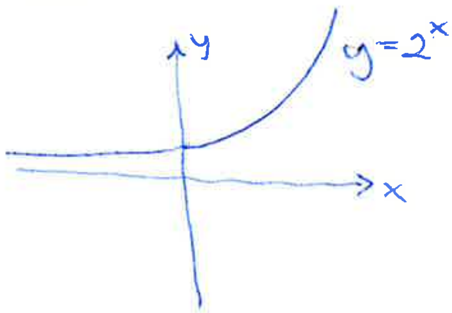


Alle potensfunksjonene er kontinuerlige.

Eksponentialfunksjoner:

$f(x) = a^x$, der $a > 0$ er et fast tall

Eks: $f(x) = 2^x$



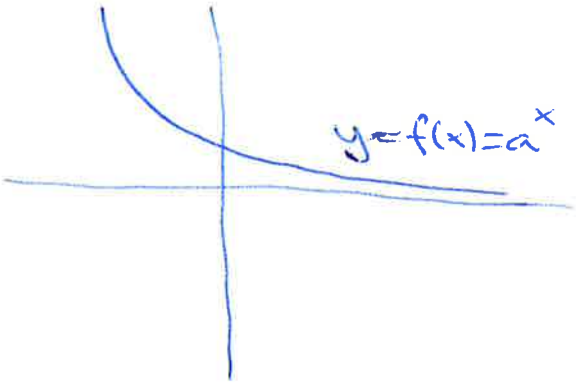
$f(0) = 1$ $f(1) = 2$ $f(2) = 4$

$f(100)$ er et stort tall med ca 30 siffer

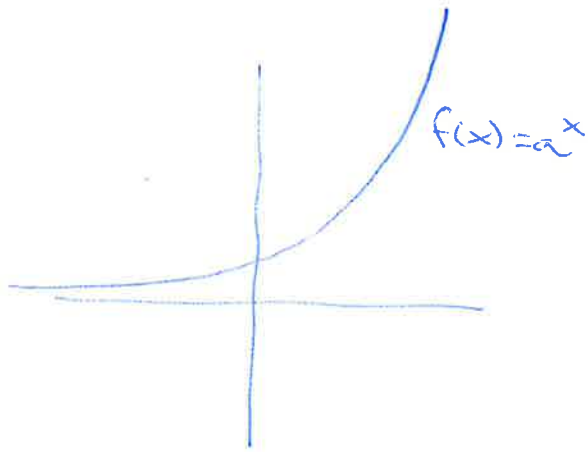
Noen viktige egenskaper ved eksponentialfunksjoner: $f(x) = a^x$, $a > 0$

i) f er kontinuerlig

ii) Grafen til f er



$0 < a < 1$



$a > 1$

iii) f er strengt voksende om $a > 1$

og f er strengt avtagende om $a < 1$

På kalkulator:

$\boxed{x^y}$ eller $\boxed{e^x}$ ← Spesialtilfellet $a = e$

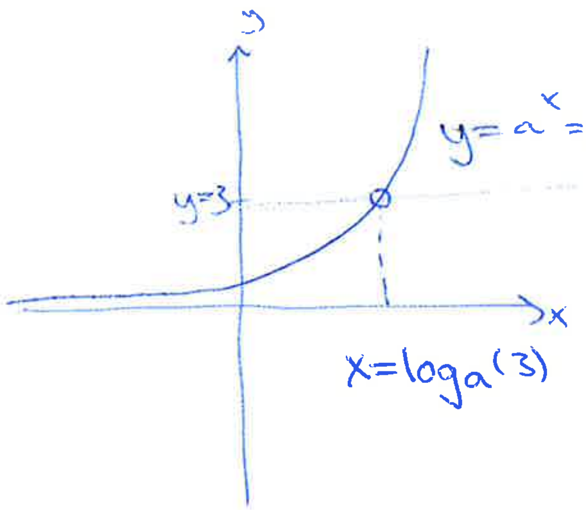
$\approx 2.71828\ldots$

(4) Logaritmer.

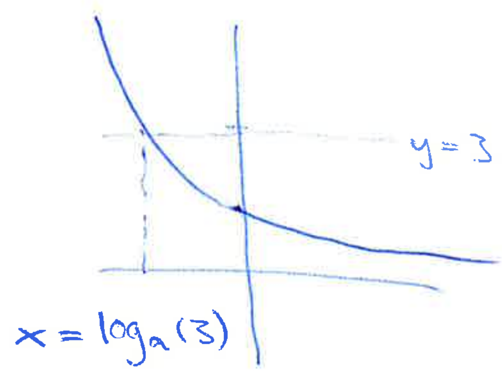
Dersom $a > 0$, $a \neq 1$ så har $f(x) = a^x$ en omvendt funksjon. Den skrives

$$f^{-1}(x) = \log_a(x) \leftarrow \text{logaritmen med grunntall } a$$

$a > 1$:



$0 < a < 1$:

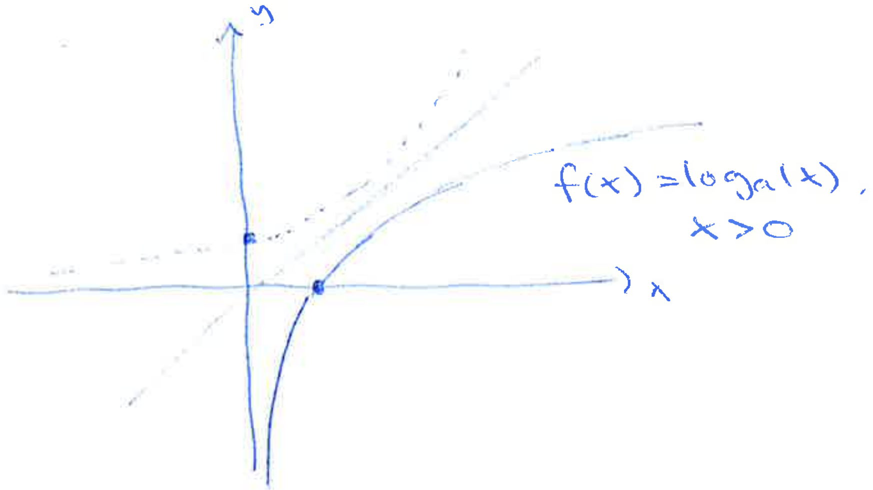


$a = 2$: $\quad 2^x = 3$

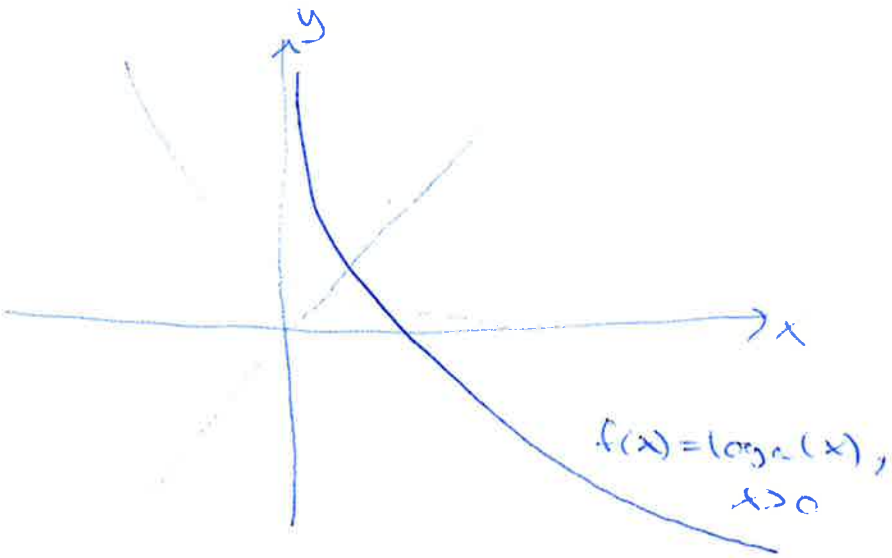
$$x = \log_2(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \end{array}\right\} \quad \log_2(3) = \text{den } x\text{-verdien som er slik at } 2^x = 3 \text{ er mellom 1 og 2}$$

For ethvert grunntall $a > 0$ (med $a \neq 1$), så er $\log_a(x)$ en kontinuerlig funksjon med definisjonsmengde $D = \{x : x > 0\} = (0, \infty)$ med graf



$a > 1$



$0 < a < 1$

BI

Eks: $2^x = 3$

$x = \log_2(3)$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

Regneregler for logaritmer

i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

ii) $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$

iii) $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

$a^{x-y} = a^x / a^y$

$(a^x)^y = a^{xy}$

Eks: $2^x = 3 \leftarrow$ bruker $\log_2(\cdot)$

$\log_2(2^x) = \log_2(3)$

$x = \log_2(3)$

$2^x = 3 \leftarrow$ bruker $\ln(x)$

$\ln(2^x) = \ln 3$

$x \cdot \ln(2) = \ln 3$

$x = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx$

På kalkulator:

$\boxed{\text{LN}}$

$f(x) = \ln(x)$

$\parallel$

$\log_e(x)$

naturlig logaritme

= logaritme med grunntall e

Viktig formel:

$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Likninger med eksponential funksjoner og logaritmer.

$$3\cdot 10^x = 4 \quad \Rightarrow \quad 10^x = 4/3 \quad \Rightarrow x = \log_{10}(4/3)$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(3\cdot 10^x) = \ln(4)$$

$$\ln(3) + \ln(10^x) = \ln 4$$

$$\ln(3) + x\cdot\ln(10) = \ln 4$$

$$x\cdot\ln(10) = \ln 4 - \ln 3$$

$$x = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 10}$$

$$2\cdot\log_{10}(x) = 3$$

$$\log_{10}(x) = 3/2 \quad \longleftarrow \text{bruker } 10^x$$

$$10^{\log_{10}(x)} = 10^{3/2}$$

$$x = 10\cdot\sqrt{10}$$