PLENUMSREGNING 1 MET 1180

EIVIND ERIKSEN, SEP 23, 2015 MATEMATIKK

Oppgaver:

[S] 3.8c, 3.13 bcd

[E] 1.5.3, 1.6.4, 1.6.5, 1.7.5, 1.8.4, 2.1.4, 2.2.3, 2.3.2, 2.4.3

[Eksamen] MET11802 04/15, Opps 3, MET11803 05/14, Opps 4

3.8 c) $\frac{1}{2}z^2 = z - 3 \quad | \cdot 2$

$$z^2 = 2z - 6$$

$$z^2 - 2z + 6 = 0$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 6}}{2}$$

ingen løsn.

Denne oppgaven har feil løsning i boken

3.13 b) $x^2 + x - 12 = (x-3)\cdot(x+4)$

$x^2 + x - 12 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3,\ -4$$

c) $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$

$x^2 - 2x - 15 = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-15)}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 5,\ -3$$

d) $-27 - 6x + x^2 = (x-9)(x+3)$

$x^2 - 6x - 27 = 0$:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot(-27)}}{2} = \frac{6 \pm 12}{2} = 9,\ -3$$

[E] 1.6.3.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \tfrac{1}{128} = 1 \cdot \frac{1-(1/2)^8}{1-(1/2)} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} 2\cdot\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\right)$$

$$= 2 - 2^{-7}$$

$$= 2 - \frac{1}{128}$$

$$= \frac{256}{128} - \frac{1}{128} = \frac{255}{128}$$

ant ledd: $a_1 = 1$, $k = 1/2$

$$a_n = 1/128 = a_1 \cdot (1/2)^{n-1}$$

$$1/128 = 1 \cdot (1/2)^{n-1}$$

$$\frac{1}{128} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$128 = 2^{n-1}$$

$$n-1 = 7$$

$$n = 8$$

$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$\vdots$
$2^7 = 128$

1.6.4.

$$\text{Samlede renter} = \underbrace{240 \cdot A}_{\text{Samlede innbet.}} - \underbrace{3.000.000}_{\text{Samlede avdrag}}$$

$$A = \frac{3.000.000\, r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$n = 20 \cdot 12 = 240$
$r = 4.25\%/12$
$\simeq 0.00354$

$$\simeq 18.577,03$$

3.000.000 $\boxed{\times}$ 0,0425 / 12 $\boxed{\times}$ (1 + 0.0425 / 12) $\boxed{x^y}$ 240
/ ((1 + 0.0425 / 12) $\boxed{x^y}$ 240 − 1) = 18.577,03

Renter = 240 · A − 3.000.000 $\simeq$ 1.458.487,91 kr

Avrundingsfeil:

Bruker vi $A = 18.577,03$ avrundet med to desimaler i rente beregningen, får vi

$$240 \cdot 18.577,03 - 3.000.000 = \underline{1.458.487,20}$$

(feilen er liten, ca 0,71 kr)

Bruker vi $r = 0,00354$ avrundet med 5 desimaler / 3 gjeldende siffer, får vi i beregningen av A

$$A = \frac{3.000000 \cdot 0,00354 \cdot 1,00354^{240}}{1,00354^{240} - 1} \simeq 18.573,84$$

og i renteberegningen

$$240 \cdot A - 3.000.000 \simeq 240 \cdot 18.573,84 - 3.000.000$$
$$= 1.457.721,60 \text{ kr}$$

(feilen er endel større, kr 766,31)

Husk: Små avrundingsfeil i mellomregninger kan gi store feil i sluttverdi – det kommer an på hvilke operasjoner vi gjør.

I oppgaver av denne typen, får avrunding av renten størst betydning (dvs størst feil)

Serielån: Avdrag: $\dfrac{3.000.000}{240}$ $= \cancel{[illegible]}$ $\underline{12.500 \text{ kr}}$

Rente i termin 1: $3.000.000 \cdot \dfrac{0{,}0425}{12} = \underline{10{,}625}$

i termin 2: $(3.000.000 - 12.500) \cdot \dfrac{0.0425}{12} =$

$\cong 10.625 - \underline{\underline{44{,}27}} \cong \underline{10.580{,}73}$

Samlede renter: Aritmetisk rekke

$a_1 = 10.625$

$d = -12.500 \cdot \dfrac{0{,}0425}{12}$

$n = 240$

$$n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 240 \cdot \frac{10.625 + \left(10.625 - 12500 \cdot \frac{0.0425}{12} \cdot 239\right)}{2}$$

$$= \underline{\underline{1.280.312{,}50}}$$

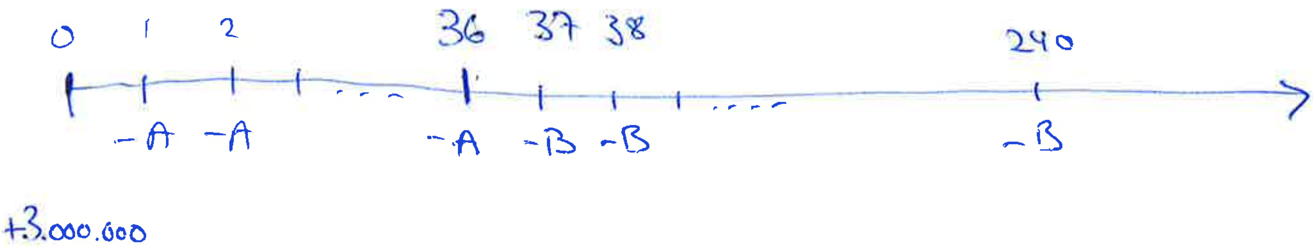
Avrunding: Bruker vi $d = -44{,}27$ avrundet til to desimaler, får vi $1280.336{,}40$ kr i samlede renter (feilen er $23{,}90$ kr)

1.6.5

Første tre år: $r_1 = \frac{0,0425}{12}$ $A = 18.577,03$ kr   (fra forrige opps.)

Siste 17 år: $r_2 = \frac{0,0475}{12}$ $B = ?$

Vi må finne nytt terminbeløp B:



Vi finner først saldo etter tre år:

Nåverdi: $3000.000 - \frac{A}{1+r_1} - \frac{A}{(1+r_1)^2} - \dots - \frac{A}{(1+r_1)^{36}}$

$$= 3.000.000 - \frac{A\left((1+r_1)^{36}-1\right)}{r_1(1+r_1)^{36}}$$

$$\simeq 3.000.000 - 18.577,03 \cdot 33,7435 = 2.373.145,69$$

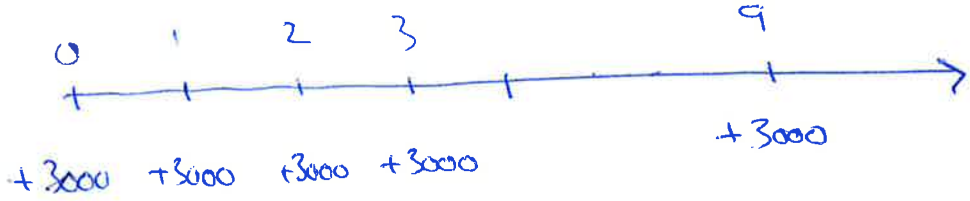
Sluttverdi = saldo etter 3 år:

$$2.373.145,69 \cdot (1+r_1)^{36} \simeq 2.695.250,49$$

Nytt terminbeløp B: Beregner terminbeløp for nytt lån med L = og rente $r_2 = 0,0475/12$, $n = 240 - 36 = 204$:

$$B \simeq \frac{2.695.250,49 \cdot r_2 \cdot (1+r_2)^{204}}{(1+r_2)^{204} - 1} \simeq \underline{19.281,35}$$

1.8.4



Saldo = sluttverdi =

$$3000\cdot(e^{0,03})^9 + 3000\cdot(e^{0,03})^8 + \dots + 3000$$

$$= 3000e^{0,27}\cdot\frac{1-(e^{-0,03})^{10}}{1-e^{-0,03}}$$

geometrisk rekke med $k=e^{-0,03}$ og $a_1 = 3000e^{0,27}$

$$= \frac{3000\cdot e^{0,27}\cdot(1-e^{-0,3})}{1-e^{-0,03}} \simeq \underline{34.463,72 \text{ kr}}$$

Alt: Vi kan endre rekkefølgen i rekken slik at $a_1 = 3000$, $k = e^{0,03}$ (baklengs):

$$3000\cdot\frac{1-(e^{0,03})^{10}}{1-e^{0,03}} \simeq \underline{34.463,72 \text{ kr}}$$

[E] 2.1.4

$$0 \cdot x = b \Rightarrow \begin{cases} \underline{b=0}: & \text{alle } x \text{ løsn.} \\ \underline{b \neq 0}: & \text{ingen løsn. } x \end{cases}$$

2.2.3

$$x^2 \underline{-7}x + \left(-7/2\right)^2 = (x+p)^2$$

$$= x^2 + \underline{2p}x + p^2$$

$$p = \frac{-7}{2}$$

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x^2 - 7x + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2 = -10 + \left(\tfrac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \tfrac{7}{2}\right)^2 = -10 + \frac{49}{4} = \frac{49-40}{4} = \frac{9}{4}$$

$$x - 7/2 = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\underline{x = 5}, \quad \underline{x = 2}$$

d) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$2x^2 - 5x = -3$$

$$2\left(x^2 - \tfrac{5}{2}x + \left(\tfrac{5}{4}\right)^2\right) = -3 + 2\cdot\left(\tfrac{5}{4}\right)^2$$

$$2\left(x - 5/4\right)^2 = \frac{-3\cdot 16}{16} + \frac{50}{16} = \frac{2}{16} \quad \Big| :2$$

$$\left(x - 5/4\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$x - 5/4 = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}$$

$$x = 5/4 \pm 1/4 = \underline{3/2}, \ \underline{1}$$

2.3.2 $2x^2 - sx + 8 = 0$ (s parameter)

For hver sitt s, er dette en annengrads-likn i x:

$a = 2 \quad b = -s \quad c = 8$

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 64}}{4}$$

a) to løsninger: $s^2 - 64 > 0$

$s^2 > 64$

$\underline{s > 8}$ eller $\underline{s < -8}$

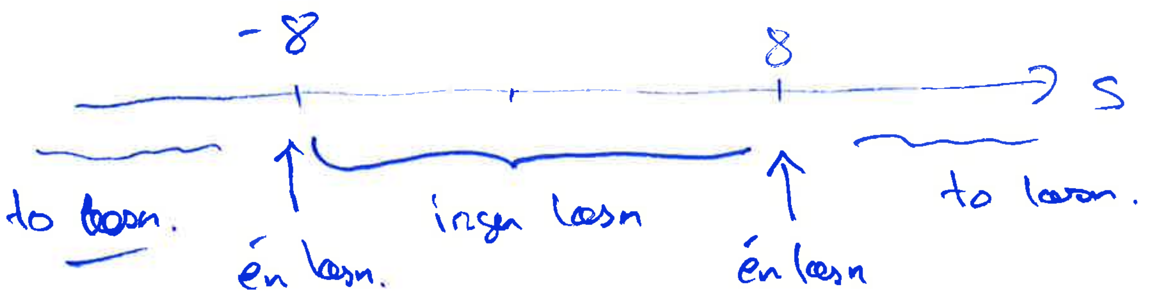
b) én løsning: $s^2 - 64 = 0$

$\underline{s = 8}$ eller $\underline{s = -8}$

c) Ingen løsning: $s^2 - 64 < 0$

$s^2 < 64$

$\underline{s < 8}$ og $\underline{s > -8}$



[E] 2.4.3.

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

$(x^2)^2 - 4(x^2) + 3 = 0$

$x^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$

$= \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$x^2 = 3$ eller $x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{3}$ eller $x = \pm 1$

$u = x^2$:

$u^2 - 4u + 3 = 0$

$u = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$

c) $x^5 - x^3 - 12x = 0$

$x(x^4 - x^2 - 12) = 0$

$x = 0$ eller $x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2)^2 - x^2 - 12 = 0$

$x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$

$x^2 = 4$ eller $x^2 = -3$

$x = \pm 2$ | ingen løsn.

Eks. 11802, 04/15, Opps. 3

$$(x^2 - x - 5)^2 = 1$$

$$x^2 - x - 5 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$x^2 - x - 5 = 1$ eller $x^2 - x - 5 = -1$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\underline{x_1 = 3}, \quad x_2 = -2$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot(-4)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\underline{x_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}}, \quad x_4 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

$$ab = x_1 x_3 = 3 \cdot \frac{1+\sqrt{17}}{2} = \underline{\underline{\frac{3(1+\sqrt{17})}{2}}}$$

Eks 11803, 05/14, oppg 4

Geometrisk rekke: $3x^2 + 9x^4 + 27x^6 + \dots$

$a_1 = 3x^2 \qquad k = \frac{9x^4}{3x^2} = 3x^2$

a) $S(n) = a_1 + \dots + a_n = 3x^2 \cdot \frac{1-(3x^2)^n}{1-3x^2}$

$$= \frac{3x^2 \cdot (1 - 3^n x^{2n})}{1-3x^2}$$

$x = 1/3$: $\frac{3\cdot(1/3)^2 \cdot (1-(1/3)^n)}{1-1/3}$

$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\cancel{3}}{3^{\cancel{2}}} = 1/3$

$$= \frac{1/\cancel{3} \cdot \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot \cancel{3}}{2/\cancel{3} \cdot \cancel{3}}$$

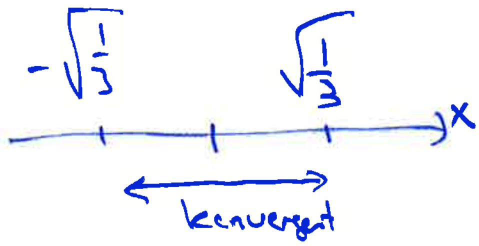
$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

b) konvergent $\iff |k| < 1$

$|3x^2| < 1$

$3x^2 < 1$

$x^2 < 1/3$



$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-k} = \frac{3x^2}{1-3x^2} = 10$$

$$\frac{3x^2}{1-3x^2} = 10 \quad \Big| \cdot (1-3x^2) \neq 0$$

$$3x^2 = 10\cdot(1-3x^2) = 10 - 30x^2$$

$$33x^2 = 10$$

$$x^2 = 10/33 < 1/3$$

$$x = \pm\sqrt{10/33} \quad \text{konvergent}$$

$$\simeq \pm 0{,}55$$