MET 1180, forelesning 8, 1. okt. 2018, Runar Ile

1. Oppgaver fra veiledningen
2. Voksende og avtagende funksjoner kap 3.6
3. Sirkler og ellipser kap 3.7
4. Polynomfunksjoner kap. 3.8

1. Oppgaver fra veiledningen

<u>Oppg 3a</u> Fordi vi har <u>to</u> klare nullpunkter er

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2) = a(x-2)(x-5)$$

nullpunkter

$$f(0) = 5 \quad \text{dvs} \quad a(0-2)(0-5) = 5$$

$$\text{dvs} \quad a \cdot 10 = 5$$

$$\text{dvs} \quad a = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

så $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-5)$

b) Vi ser at $x = 2$ er et nullpunkt og at $x = -\frac{1}{2}$ er symmetriaksen. Da må det andre nullpunktet være $x = -\frac{1}{2} - 2{,}5 = -3$

Altså er $f(x) = a(x-2)(x+3)$. Dessuten ser vi at $f(0) = 6$, dvs $a(0-2)(0+3) = 6$

$$\text{dvs} \quad a \cdot (-6) = 6$$

$$\text{dvs} \quad a = \frac{6}{-6} = -1$$

så $f(x) = -(x-2)(x+3)$

c) Vi ser at $x = 100$ er en dobbeltrot, så
$f(x) = a(x-100)^2$. Fordi $(80, 40)$
ligger på grafen vil
$f(80) = 40$ dvs $a(80-100)^2 = 40$
dvs $a(-20)^2 = 40$
dvs $a \cdot 400 = 40$
dvs $a = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

Så $\underline{f(x) = \frac{1}{10}(x-100)^2}$.

d) Vi ser at $x = 1$ gir symmetriaksen og
at maksverdien er $y = -1$.
Da er $f(x) = a(x-s)^2 + d$
$= a(x-1)^2 - 1$

Fordi $(0, -2)$ ligger på grafen får vi
$f(0) = -2$, dvs $a(0-1)^2 - 1 = -2$
dvs $a - 1 = -2$
dvs $a = -2+1 = \underline{-1}$

Så $\underline{\underline{f(x) = -(x-1)^2 - 1}}$

e) Symmetriaksen er $x = -3$, bunnverdi $y = 4{,}25$
så $f(x) = a(x+3)^2 + 4{,}25$
Fordi $(-2, 4{,}5)$ ligger på grafen får vi
$f(-2) = 4{,}5$ dvs $a(-2+3)^2 + 4{,}25 = 4{,}5$
dvs $a = 4{,}5 - 4{,}25$
$a = 0{,}25$

Dvs $\underline{\underline{f(x) = 0{,}25 \cdot (x+3)^2 + 4{,}25}}$

f) Symmetrilinje er $x = 50$, minverdi er $y = 1$

så $f(x) = a(x-50)^2 + 1$.

Vi ser at $(40, 2)$ ligger på grafen, så

$f(40) = 2$, dvs $a(40-50)^2 + 1 = 2$

dvs $a \cdot 100 = 2 - 1 = 1$

dvs $a = \frac{1}{100}$

Altså $\underline{f(x) = \frac{1}{100}(x-50)^2 + 1}$.

Oppg 7a Tre punkter på grafen: $P = (0, 7)$

$Q = (1, 4)$

$R = (2, 3)$

Vet lite, bruker formen

$f(x) = ax^2 + bx + c$

P: $f(0) = 7$, dvs $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 7$

dvs $c = 7$

så $f(x) = ax^2 + bx + 7$.

Q: $f(1) = 4$, dvs $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 7 = 4$

dvs $\underline{a + b = -3}$ (1)

R: $f(2) = 3$, dvs $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 7 = 3$

dvs $\underline{4a + 2b = -4}$ (2)

Løser disse to likningene:

Fra (1) får $4a + 4b = 4 \cdot (-3) = -12$

(2): $4a + 2b = -4$

$= \quad 0a + 2b = -12 - (-4) = -8$

så $b = -\frac{8}{2} = \underline{-4}$

og $a \overset{(1)}{=} -3 - (-4) = 1$. Dvs $f(x) = \underline{x^2 - 4x + 7}$

Oppsummering (andregradsfunksjoner)

3 standardformer:

A) Hvis vi kjenner røttene: $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$

B) Hvis vi kjenner symmetriaksen og maks(min)-verdien: $f(x) = a(x-s)^2 + d$

C) Andre tilfeller: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(men da kan vi også bruke B)

---

2. Voksende og avtagende funksjoner

Eks: $f(x) = 0{,}03x^2 + 8x - 1500$, $I = [0, \infty\rangle$

- vokser $f(x)$ i hele I? (dvs $x \geq 0$)
- avtar $f(x)$ i hele I?
- Ingen av delene?

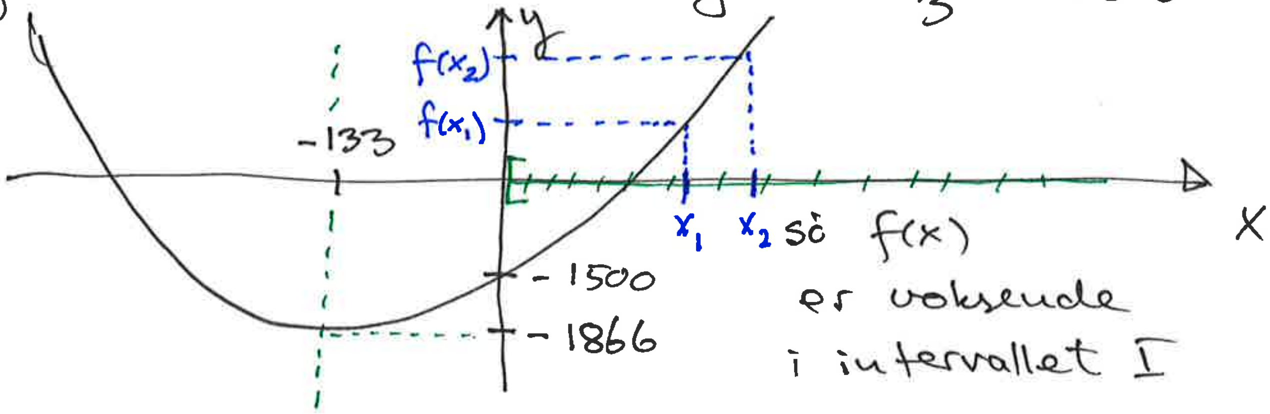
Hvordan? - se på grafen (GeoGebra)

Eller fullføre kvadratet (og så tegne grafen)

Får $f(x) = 0{,}03 \cdot \left(x + \frac{800}{6}\right)^2 - \frac{5600}{3}$

symmetriaksen er gitt ved $x = -\frac{800}{6} \approx -133$

og minimumsverdien er $y = -\frac{5600}{3} \approx -1866$



så $f(x)$ er voksende i intervallet I

Definisjon: En funksjon $f(x)$ er voksende på intervallet I hvis for alle $x_1 < x_2$ i I så gjelder $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Eks: $f(x) = 2x + 5$ er voksende i alle intervaller

Begrunnelse: Hvis $x_1 < x_2$ så er

$$2x_1 < 2x_2 \quad \text{og}$$

$$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Definisjon En funksjon $f(x)$ er avtagende på et intervall I hvis for alle $x_1 < x_2$ i I så er $f(x_1) \geq f(x_2)$

Oppg: Vis at $f(x) = -2x + 5$ er avtagende på alle intervaller.

Løsning: Anta $x_1 < x_2 \quad \Big| \cdot (-2)$

$$-2x_1 > -2x_2$$

legger til 5 på b.s.

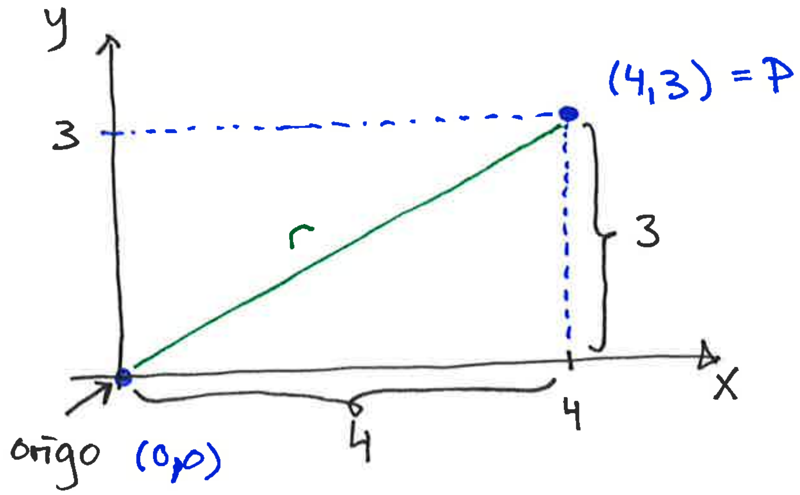
$$f(x_1) = -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Oppg: Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$. Avgjør om $f(x)$ er voksende eller avtagende på intervallet $[1, 3]$ (dvs $1 \leq x \leq 3$)

Definisjon: $f(x)$ strengt voksende: $f(x_1) < f(x_2)$ for alle $x_1 < x_2$

$f(x)$ —"— avtagende: $f(x_1) > f(x_2)$ —"—

3. Sirkler og ellipser



Hva er avstanden fra P til origo?

Pytagoras gir svaret:

$$r^2 = 4^2 + 3^2 \quad (r \geq 0)$$

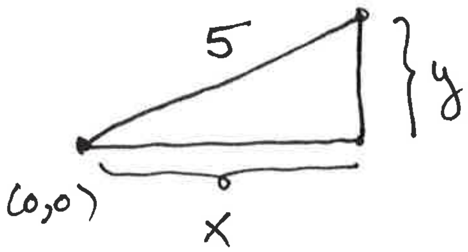
$$r^2 = 16 + 9$$

$$r^2 = 25$$

$$\underline{r = 5}$$

Hvilke andre punkter i planet har avstand 5 fra origo?

Anta (x, y) er et slikt punkt.



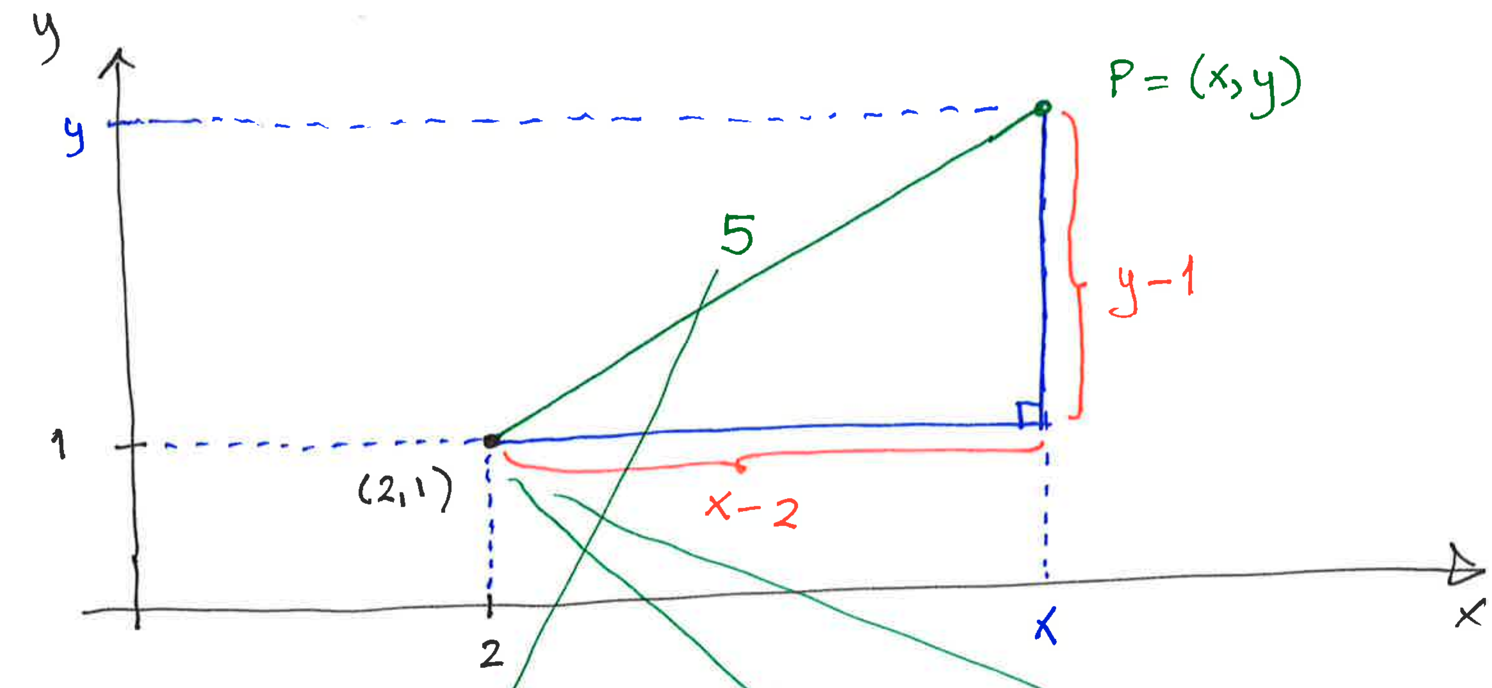
Får likningen (fra Pytagoras)

$$5^2 = x^2 + y^2$$

- likning med to ukjente
- har uendelig mange løsninger

Løsningene er alle punkter som har avstand 5 fra origo. Denne mengden kalles for sirkelen med sentrum i origo og radius 5.

Eks: Hva er likningen for punktene på sirkelen med sentrum $(2, 1)$ og radius 5?



Pytagoras: $5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

dvs $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$

Oppg Finn radius og sentrum i sirklene.

a) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) $x^2 + (y+5)^2 = 10$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y = -9$

Løsn: (a) sentrum $(3, 2)$, radius $= \sqrt{16} = 4$

(b) sentrum $(0, -5)$, radius $= \sqrt{10}$

(c) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -9$

$$\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} + \underbrace{(y+3)^2}_{y^2+6y+9} = -9 + 1^2 + 3^2 = 1$$

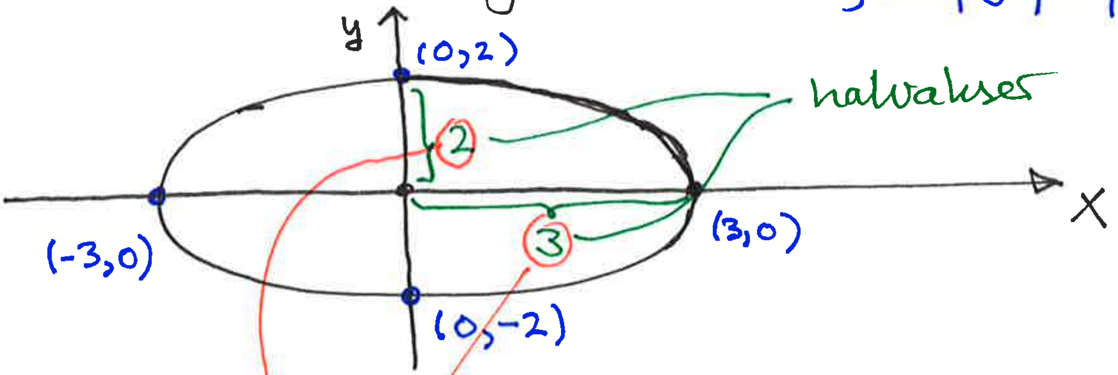
sentrum: $(1, -3)$

radius $= \sqrt{1} = 1$

Ellipser

Eks: $4x^2 + 9y^2 = 36$

x	3	-3	0	0
y	0	0	2	-2



Deler b.s. av likningen med 36:

$$\underset{=\frac{1}{9}}{\frac{4}{36}}x^2 + \overset{=\frac{1}{4}}{\frac{9}{36}}y^2 = 1$$

dvs $$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

minner om sirkellikningen, men x-en strekkes med faktor 3 og y-en strekkes med faktor 2.

Generelt kan vi skrive likningen for en ellipse med sentrum i (x_0, y_0) og halvakser a og b $(a, b > 0)$ som

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Eks: $$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$a = 2$, $b = 3$ og sentrum $(2,3)$