MET 1180, 15. forelesning, 25. okt. 2022, Runar Ile

Plan: Snakke om noen av fagoppgaveoppgavene.

9ab Inverse funksjoner
10 En voksende funksjon
8bc Ellipser
6b Polynomdivisjon og faktorisering
5cd Ulikheter

Oppg 9 Inverse funksjoner

9a) $f(x) = 10 + \frac{0{,}2}{x-3}$, $D_f = \langle 3, \infty \rangle$

For å finne inversfunksjonen med funksjonsuttrykk $g(x)$ og definisjonsmengde D_g gjør vi følgende:

① Løser likningen $y = f(x)$ for x.

$$y = 10 + \frac{0{,}2}{x-3} \quad \Big| -10$$

$$y - 10 = \frac{0{,}2}{x-3} \quad \Big| \cdot (x-3)$$

$$(y-10)(x-3) = 0{,}2 \quad \Big| : (y-10)$$

$$x - 3 = \frac{0{,}2}{y-10} \quad \Big| + 3$$

$$x = 3 + \frac{0{,}2}{y-10}$$

② Bytter om variablene: $g(x) = 3 + \frac{0{,}2}{x-10}$

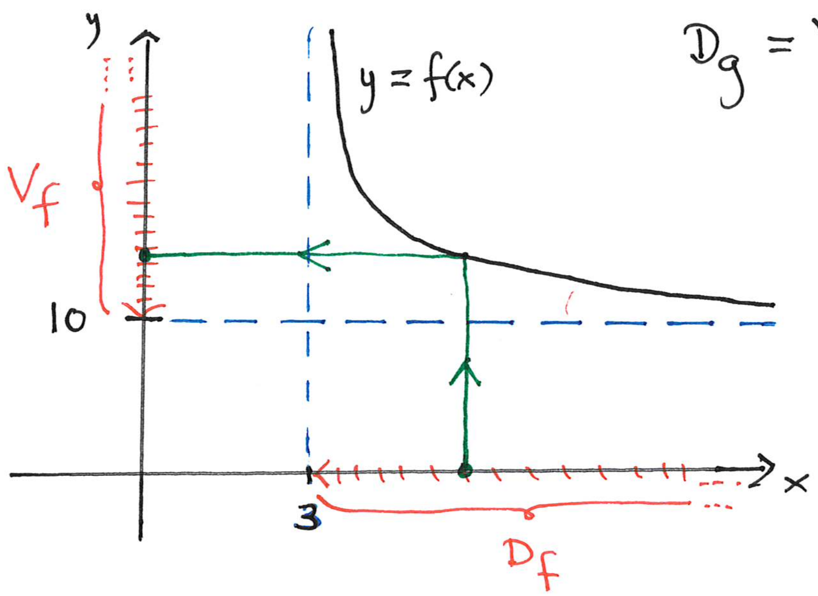
③ $D_g \overset{\text{alltid}}{=} V_f$ (verdimengden til $f(x)$)

$f(x)$ har en vertikal asymptote for $x = 3$

og $\quad f(x) \xrightarrow[x \to 3^+]{} +\infty$

$f(x)$ har også en horisontal asymptote $y = 10$

og $\quad f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 10^+$ så



$$D_g = V_f = \langle 10, \infty \rangle$$

9.b) $f(x) = \ln(10x - x^2)$, $D_f = [1, 5]$

① Løser likn. $y = \ln(10x - x^2)$ for x

Setter VS og HS inn i $e^{(\ )}$

$$e^y = e^{\ln(10x - x^2)} = 10x - x^2$$

$$x^2 - 10x = -e^y$$

Fullfører kvadratet

$$(x-5)^2 = 25 - e^y \quad \Big| \sqrt{\quad}$$

$$|x-5| = \sqrt{25-e^y}$$

Fordi $1 \leq x \leq 5$ vil $-4 \leq x-5 \leq 0$

og da er $|x-5| = -(x-5) = -x+5$

så $-x+5 = \sqrt{25-e^y}$ for $x \in D_f$

dvs $x = 5 - \sqrt{25-e^y}$

(2) Bytter variabler: $\underline{\underline{g(x) = 5 - \sqrt{25-e^x}}}$

(3) $D_g \overset{\text{alltid}}{=} V_f$ og $f(1) = \ln(10 \cdot 1 - 1^2) = \ln(9)$

$f(5) = \ln(10 \cdot 5 - 5^2) = \ln(25)$

Fordi likn. $y = f(x)$ fra (1) har løsn.
for alle y i intervallet $[\ln(9), \ln(25)]$
får vi $D_g = V_f = \underline{\underline{[\ln(9), \ln(25)]}}$

Oppg. 10: En voksende funksjon

Vi viser $f(x) = e^x$ er strengt voksende
ved å bruke definisjonen på str. voks.

Antar $x_1 < x_2$ $\quad | -x_1$

dvs $0 < x_2 - x_1$

Oppgitt: $e^x > 1$ hvis $x > 0$

dvs $1 < e^{x_2 - x_1}$

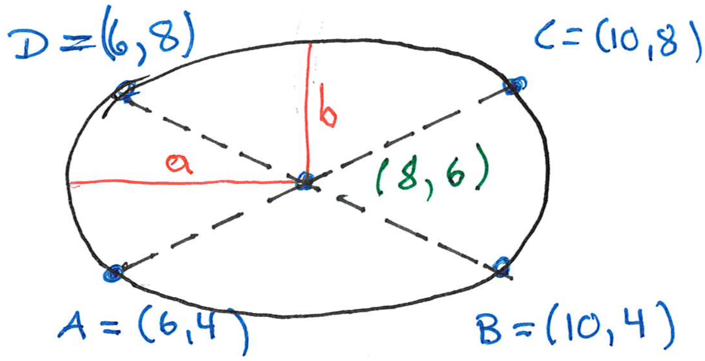
dvs $1 < \dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}$ $\quad | \cdot e^{x_1}$ (alltid pos.)

$$f(x_1) = e^{x_1} < e^{x_2} = f(x_2)$$

Altså er $f(x)$ en strengt voksende funksjon for alle x.

Start : 15.00

Oppg 8bc Ellipser



8b) Standard likn. for en slik ellipse blir da

$$\frac{(x-8)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{b^2} = 1$$

Vil at horisontal halvakse $a > b$ (vertikal halvakse)

Merk fra 8a: Hvis $a = b$ er ellipsen en sirkel og $a = b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} < 3$

Så jeg velger $a = 3$ (jeg prøver!) og fordi $C = (10,8)$ ligger på ellipsen får vi likningen

$$\frac{(10-8)^2}{9} + \frac{(8-6)^2}{b^2} = 1 \quad \text{for } b$$

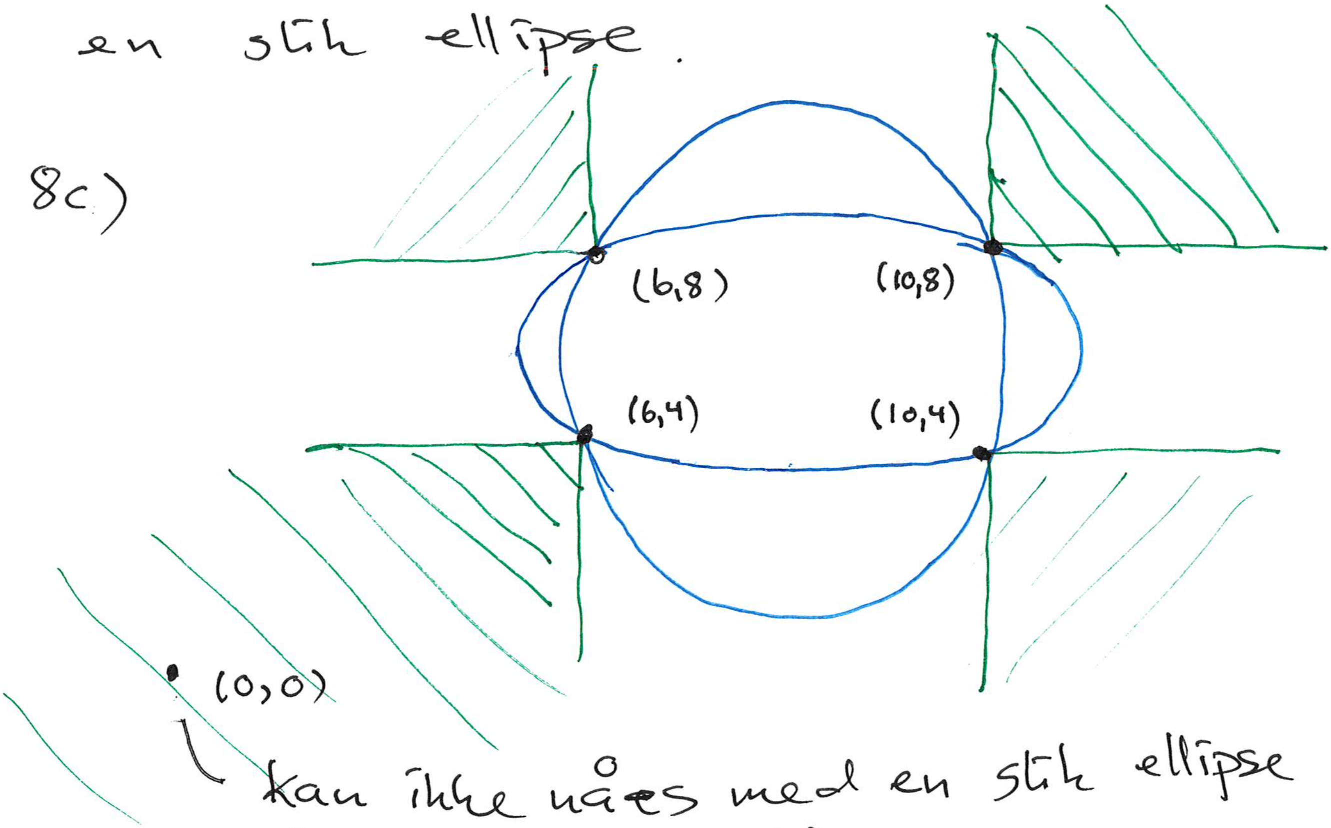
Løser den og får $b^2 = \frac{36}{5} = 7{,}2$

og $b = \frac{6}{\sqrt{5}} < 3$

Så $\dfrac{(x-8)^2}{9} + \dfrac{(y-6)^2}{7{,}2} = 1$ er

en slik ellipse.

8c)



kan ikke nåes med en slik ellipse (ved geometri)

Ved algebra: Hvis (0, 0) ligger på en slik ellipse

$$\frac{(x-8)^2}{a^2} + \frac{(y-6)^2}{b^2} = 1 \quad \text{vil}$$

$$\frac{(0-8)^2}{a^2} + \frac{(0-6)^2}{b^2} = 1, \quad \text{dvs}$$

$$\boxed{\frac{64}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1} \quad (**)$$

Men C ligger også på denne ellipsen, dvs

$$\frac{(10-8)^2}{a^2} + \frac{(8-6)^2}{b^2} = 1, \quad \text{dvs}$$

$$\boxed{\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1} \qquad (***)$$

Trekker fra VS og HS : $(**) - (***)$

$$\frac{60}{a^2} + \frac{32}{b^2} = 0$$

Fordi VS er pos. for alle verdier av a og b har likningen ingen løsninger. Altså er forutsetningen gal.

<u>Konkl</u> Det finnes ingen ellipse gjennom A – D som også går gjennom (0, 0)

<u>Oppg 6b Polynomdivisjon og faktorisering</u>

Ved polynomdiv. fikk vi

$$f(x) = q(x) \cdot (x-5) + \underbrace{25b + 5c}_{\text{konstant}}$$

Oppgitt 3dje grads poly.

Andregradspoly. som vi fant –

$$\text{Hvis } x = 5 \text{, er } f(5) = q(5) \cdot \overbrace{(5-5)}^{0} + 25b + 5c$$

$$= 25b + 5c$$ (resten)

Hvis x – 5 er en faktor i f(x), vil

$f(x) = h(x) \cdot (x-5)$. Da er $f(5) = 0$.

Hvis resten $\overset{f(5)}{\text{"}} 25b+5c = 0$ er $f(x) = q(x)\cdot(x-5)$

og $(x-5)$ er en faktor i $f(x)$.

Så $25b+5c=0$ hvis og bare hvis $x-5$ er en faktor i $f(x)$

kan dele på 5 på bs.

$$\underline{\underline{5b+c=0}}$$

———— || ————

Oppg 5 Ulikheter

5c) $$\frac{(3x-5)g(x)}{x-5} \leq g(x) \quad \Big| -g(x)$$

$$\frac{(3x-5)g(x)}{x-5} - g(x) \leq 0$$

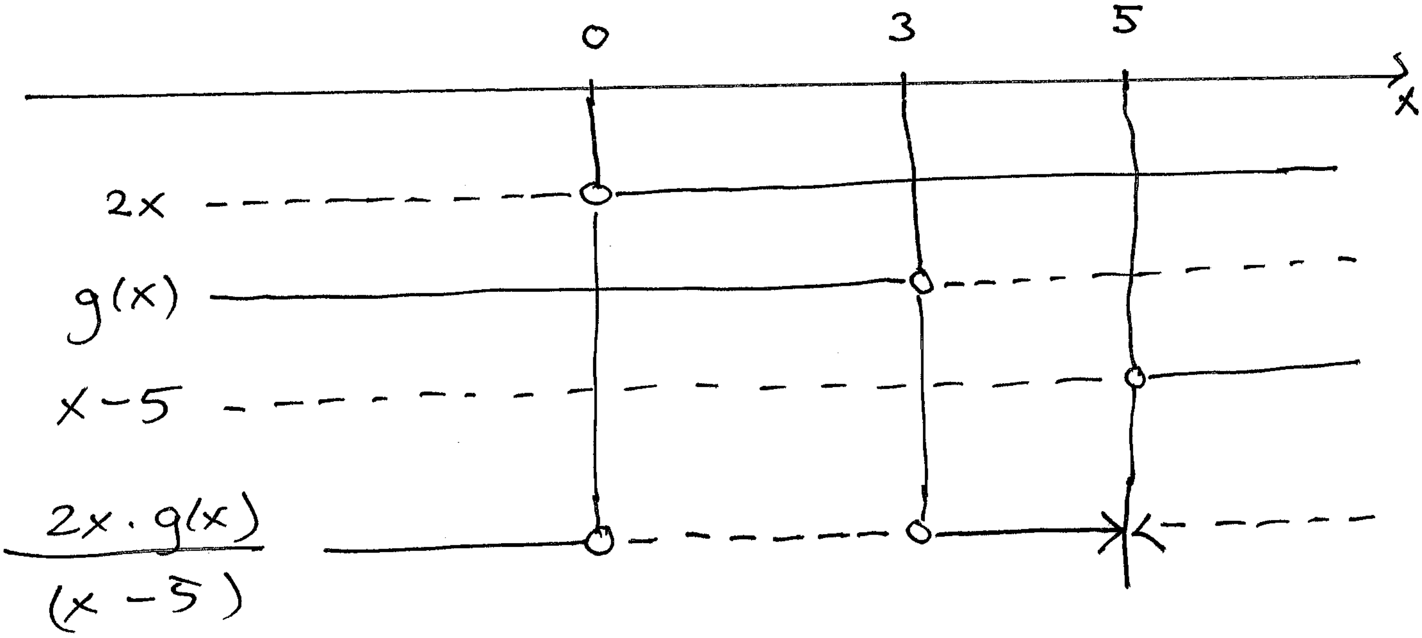
$$\frac{(3x-5)g(x)}{(x-5)} - \frac{(x-5)g(x)}{(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{(3x-5)\cdot g(x) - (x-5)\cdot g(x)}{(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{((3x-5)-(x-5))g(x)}{(x-5)} \leq 0$$

$$\frac{2x\cdot g(x)}{(x-5)} \leq 0$$

Fortegnsskjema :



Konkl $\underline{\underline{0 \leq x \leq 3 \quad \text{eller} \quad x > 5}}$

Alt. skrivemåte $\underline{\underline{x \in [0, 3] \text{ eller } x \in \langle 5, \infty \rangle}}$