MET 1180, 19. forelesning, 8. nov. 2022, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon med oppgaver fra forrige uke.
- Oppg 1c: Tegn to grafer!
- oppg 2 b, d, h, i, k: tolkninger av grafen til $f'(x)$.
- Oppg 3c: Hvilken graf er $f(x)$ / $f'(x)$?
- oppg 4g: Voksende/avtagende fra $f'(x)$.

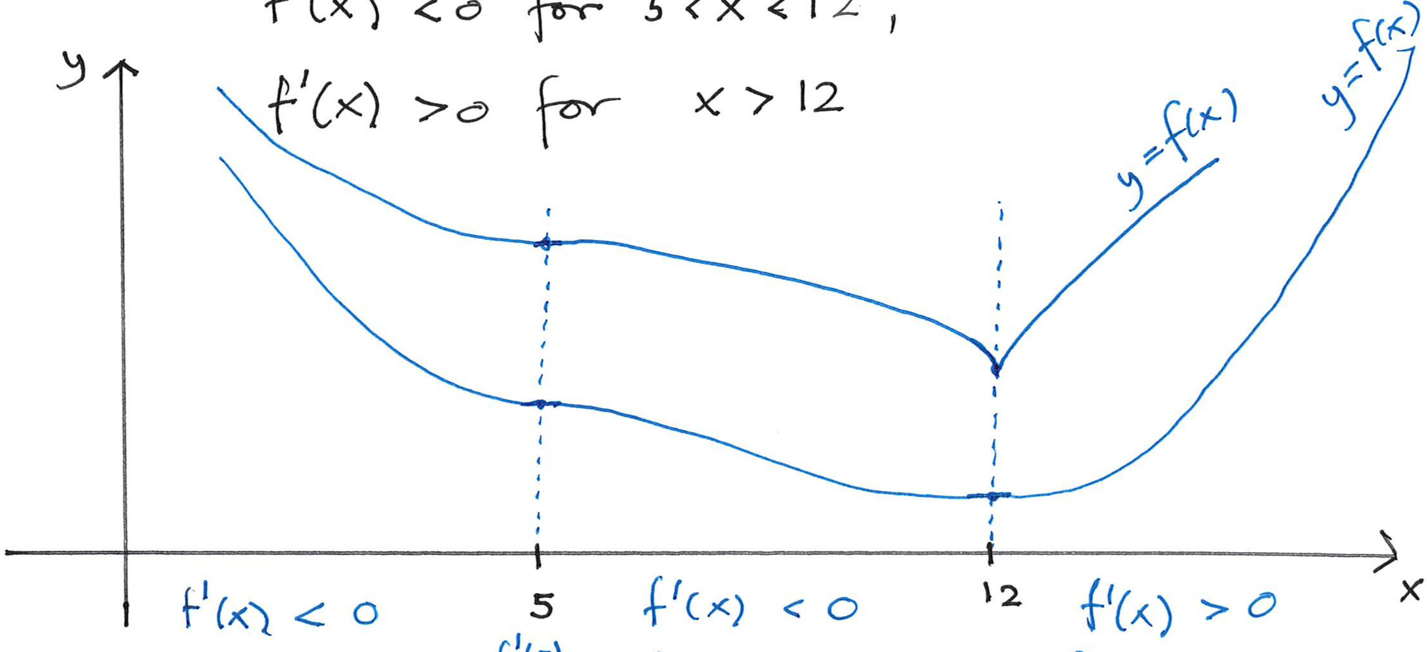
2. Implisitt derivasjon

---

Oppg 1c $f'(x) < 0$ for $x < 5$, $f'(5) = 0$

$f'(x) < 0$ for $5 < x < 12$,

$f'(x) > 0$ for $x > 12$

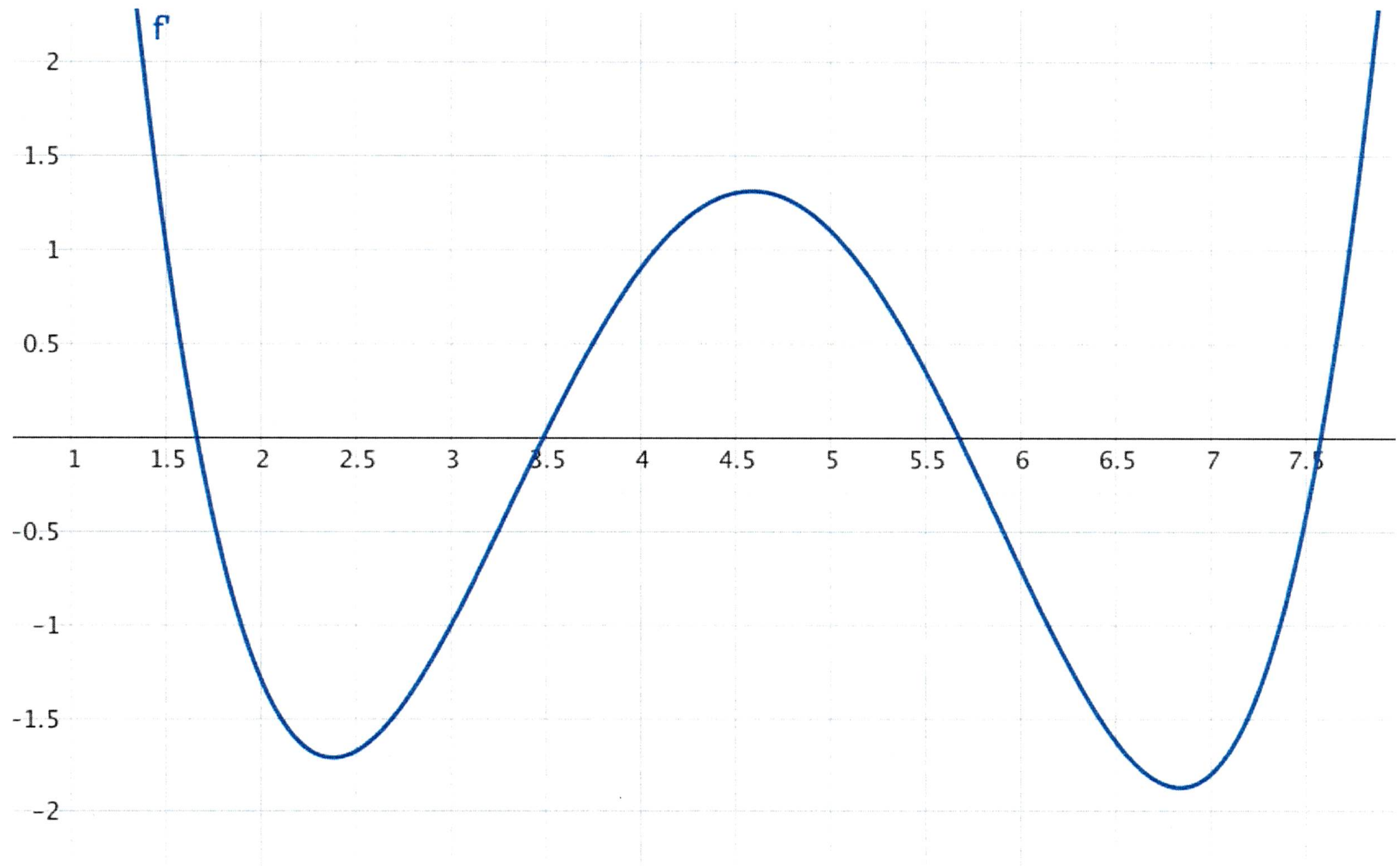



Oppg 2 b) $f(2) < f(3)$ GALT

Vi ser fra grafen til $f'(x)$ at $f'(x) < 0$ for $x \in [2, 3]$. Altså er $f(x)$ strengt avtagende for $x \in [2, 3]$, så

$f(2) > f(3)$.

**Oppgave 2** I figur 1 ser du grafen til $f'(x)$.



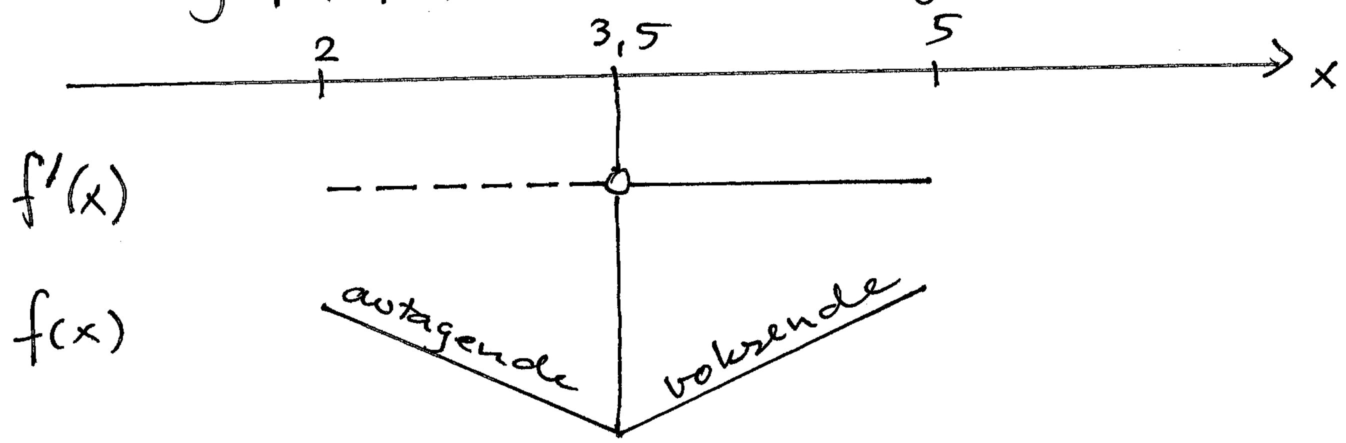

Figur 1: Grafen til $f'(x)$

2d) $f(x)$ har et (lok.) minimum ved $x=3{,}5$

SANT. Vi har at $f'(x) < 0$ for $x \in [2, 3{,}5\rangle$

og $f'(x) > 0$ for $x \in \langle 3{,}5 , 5]$

og $f'(3{,}5) = 0$. Fortegnsskjema:




Konkl: $x = 3{,}5$ er et lok. minimumspunkt. for $f(x)$.

2h) $f(x)$ vokser raskere ved $x = 1{,}5$ enn ved $x = 5{,}5$. SANT.

Fordi:

Stigningstallet til tangenten til $f(x)$ ved $x = 1{,}5$ er omtrent 1 ($f'(1{,}5) \approx 1$) og stigningstallet til tangenten til $f(x)$ ved $x = 5{,}5$ er omtrent 0,35 (vi leser av $f'(5{,}5) \approx 0{,}35$)

Grafen til $f(x)$ ligner på grafen til tangenten ved $x = 1{,}5$ når $x$ er nær 1,5.

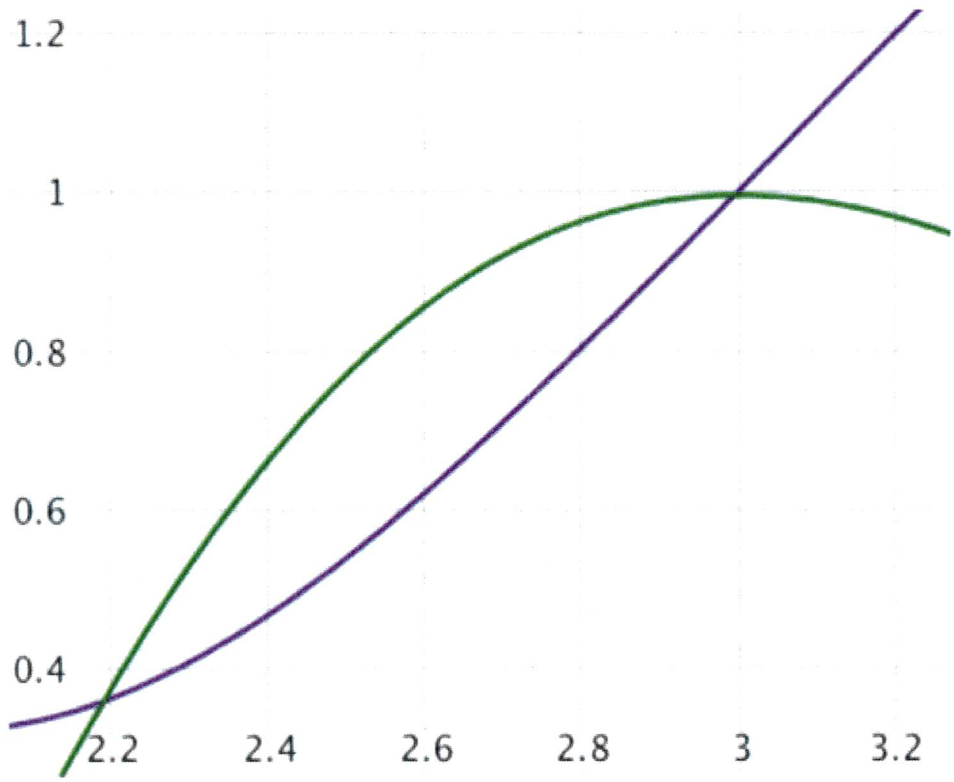
Tilsvarende for $x = 5{,}5$.

2i) Den deriverte til $f'(x)$ er positiv for $x = 7{,}6$
SANT! – fordi stigningstallet til tangenten til $f'(x)$ ved $x = 7{,}6$ er (veldig) positiv ($f''(7{,}6) \simeq 6$).

2k) Vi kan ikke bruke grafen til $f'(x)$ til å bestemme om $f(4{,}5)$ er positiv.
SANT. Hvis vi legger til (eller trekker fra) 1 mill. til $f(x)$ får vi den samme deriverte. $(= f'(x))$.

Oppg 3c Hvilken graf er $f(x)$ / $f'(x)$?
Jeg „gjetter" at $f(x)$ er den fiolette.
Men det er (mye!) lettere å vise hva som er galt. Antar derfor at $f(x)$ er den grønne. Da er $f'(x)$ den fiolette. Men stigningstallene for tangentene til den grønne for $x > 3$ er negative (den grønne er avtagende) samtidig som verdiene til den fiolette er større 1. Dette er en motsigelse.
Så antagelsen er gal. Da er det bare ett alternativ: $f(x)$ er den fiolette. og dermed må $f'(x)$ være den grønne

Start: 15.00



1.2
1
0.8
0.6
0.4
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2

Oppg 4g $f'(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$. Hvor er $f(x)$ strengt voksende/avtagende?

Vil bruke fortegnsskjema til $f'(x)$.

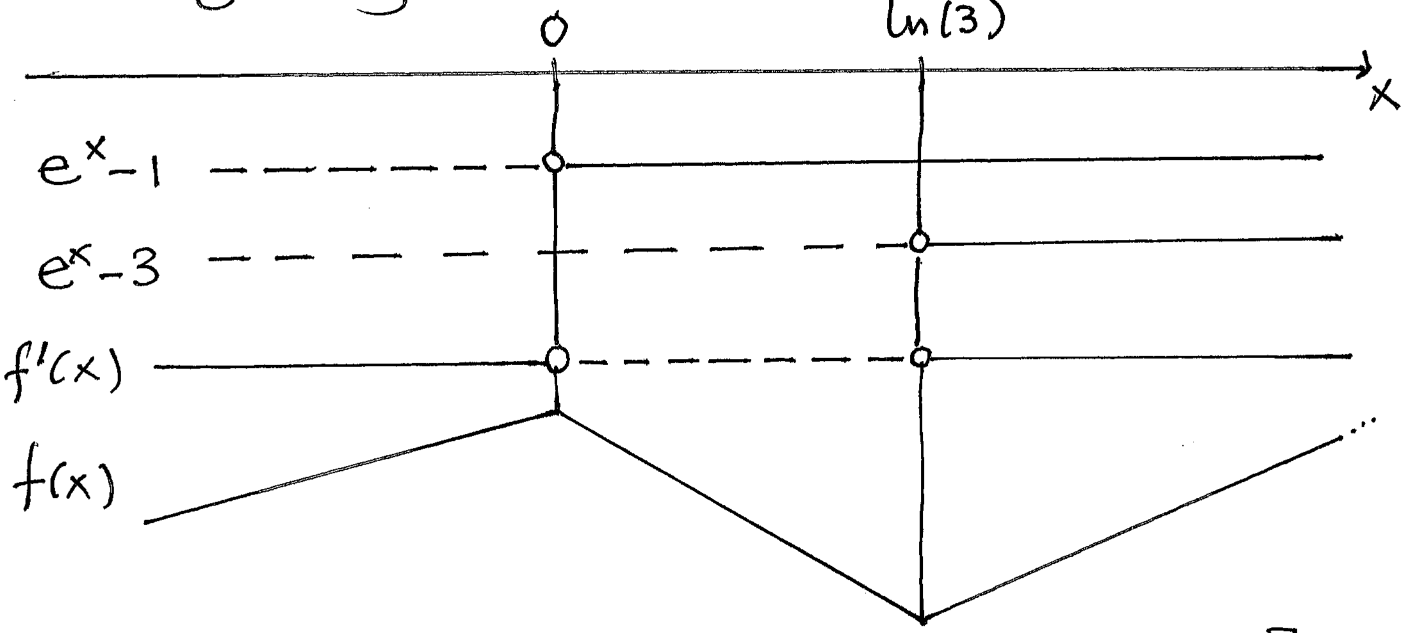
Må først faktorisére $f'(x)$.

Setter $u = e^x$. Da er $u^2 = e^x \cdot e^x = e^{2x}$

Så $f'(x) = u^2 - 4u + 3 = (u-1)(u-3)$

$= (e^x - 1)(e^x - 3)$.

Fortegnsskjema:




Så $f(x)$ er strengt voksende for $x \in \langle \leftarrow, 0]$

$f(x)$ —"— avtagende —"— $x \in [0, \ln(3)]$

$f(x)$ —"— voksende —"— $x \in [\ln(3), \rightarrow\rangle$

---

## 2. Implisitt derivasjon

Eks $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ så $f'(x) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

– vanlig derivasjon

I stedet for setter vi $y = f(x)$, dvs

$$y = \frac{1}{x} \quad | \cdot x \quad \text{får:} \quad \boxed{xy = 1}$$

Deriverer på begge sider av likningen med hensyn på $x$ og vi tenker på $y$ som en funksjon av $x$

$$(x \cdot y)'_x = (1)'_x$$

$$(x)'_x \cdot y + x \cdot (y)'_x = 0$$

$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0$$

Vi kan løse denne likningen for $y'$:

$$x \cdot y' = -y \quad | : x$$

$$\boxed{y' = -\frac{y}{x}}$$

(Merk: $y = \frac{1}{x}$, så $y' = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{1}{x^2}$ )

Dette kalles implisitt derivasjon.

En anvendelse Kan bruke implisitt derivasjon til å finne tangenter til kurven definert av likningen (blå boks) $xy = 1$

F.eks. hvis $x = 2$ så gir $xy = 1$ at $2y = 1$ dvs $y = \frac{1}{2}$

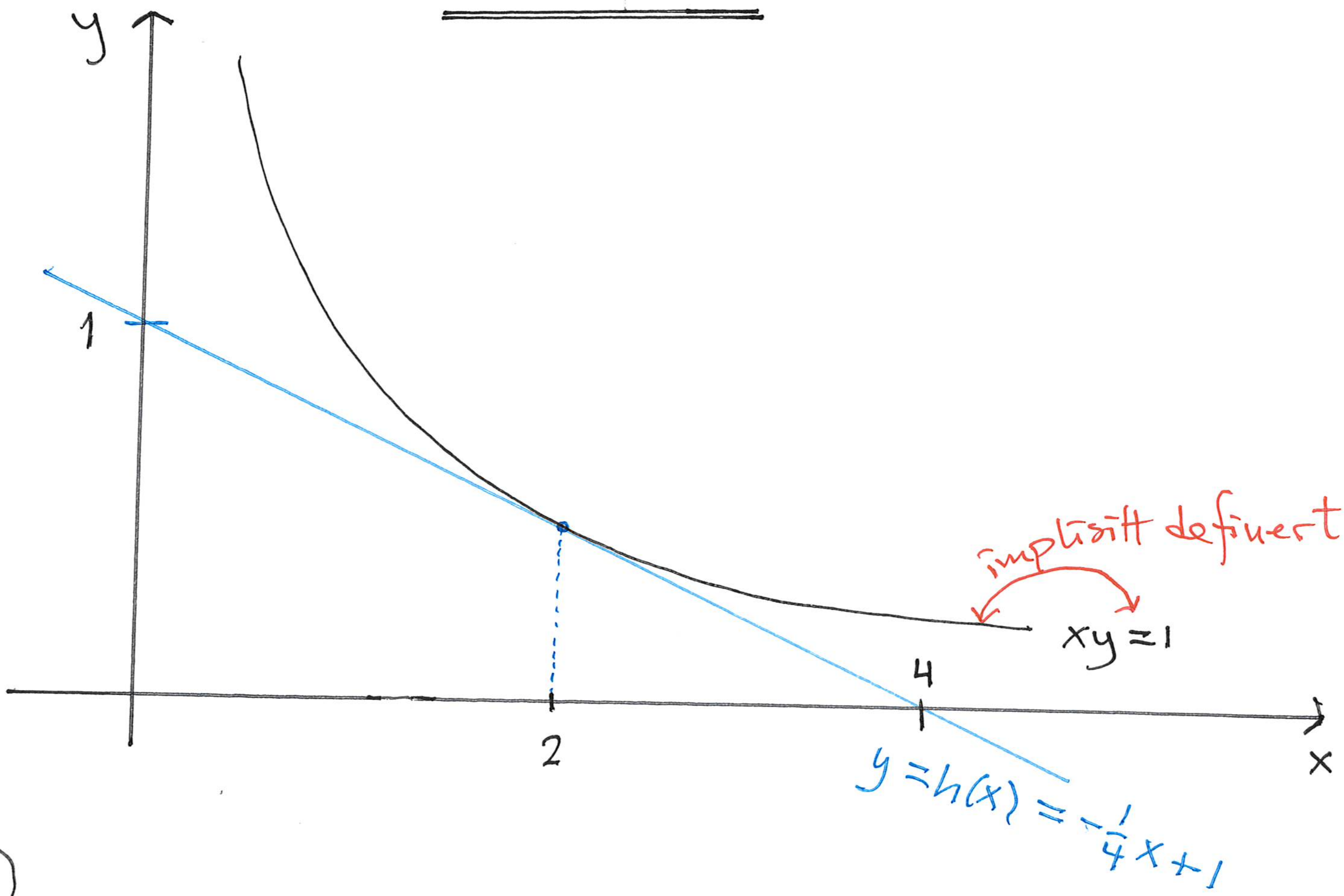
Da er $y'\Big|_{\substack{x=2\\ y=\frac{1}{2}}} \overset{\text{rød boks}}{=} -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{4}$

Kan bruke dette i ettpunktsformelen for å finne uttrykket $h(x)$ til tangentlinjen til kurven $xy = 1$ gjennom punktet $\left(2, \frac{1}{2}\right)$:

$$h(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

stigningstallet

$$h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$




6