MET 1180, 2. forelesning, 30. aug. 2022, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon (alg. uttrykk, røtter & potenser, absoluttverdi)
2. Relativ endring og vekstfaktor
3. Renter
4. Nåverdi

---

1. Repetisjon

Brøker $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}$

og $\frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{(x+3) \cdot (x-1)}{(x+4) \cdot (x+2)}$

Oppg 1i $\frac{18}{4} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{12} = \frac{18 \cdot \frac{2}{3}}{4 \cdot 12} = \frac{\frac{18}{1} \cdot \frac{2}{3}}{4 \cdot 12} = \frac{\frac{18 \cdot 2}{1 \cdot 3}}{4 \cdot 12}$

$$= \frac{\frac{18 \cdot 2}{3} \cdot 3}{4 \cdot 12 \cdot 3} = \frac{18 \cdot 2}{4 \cdot 12 \cdot 3} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppg 2i $\frac{x^2 - 3x}{x(y-3)} \cdot \frac{xy^2 - 9x}{x-3} = \frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}(y-3)} \cdot \frac{x(y^2-9)}{x-3}$

$$= \frac{\cancel{(x-3)} \cdot x \cdot (y^2-9)}{(y-3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x \cdot \cancel{(y-3)}(y+3)}{\cancel{(y-3)}}$$

$$= \frac{x(y+3)}{1} = \underline{\underline{x(y+3)}}$$

Prioriteringsregler

$2 + 3\cdot 4 = 14$

$(2+3)\cdot 4 = 20$

$-3^2 = (-1)\cdot 3\cdot 3 = -9$

$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$

Alg/Chain

og $-3\cdot 4 = -12$

Røtter/potenser

$\sqrt{5} = 5^{0,5} = 5^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 5^{0,5}\cdot 5^{0,5} = 5^{0,5+0,5} = 5^1 = 5$

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ så $(\sqrt[3]{5})^6 = (5^{\frac{1}{3}})^6 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 6} = 5^2$

Dessuten $5^{-1} = \frac{1}{5}$, $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

og $5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Mønster

Hvis m, n er heltall, $n > 0$

og $a > 0$ (pos. tall) så er

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Oppg 6i

$$\frac{\sqrt{1,03}^{\,10}}{1,03^4} = \frac{(1,03^{\frac{1}{2}})^{10}}{1,03^4} = \frac{1,03^5}{1,03^4}$$

$$= 1,03^{5-4} = \underline{\underline{1,03}}$$

Oppg Beregn $1{,}11^{\sqrt{2}}$ på kalkulatoren.

(Svar: 1,159035...)

Svar: 1,11 $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$

Samme grunntall: $2^{1{,}5} \cdot 2^{3{,}8} = 2^{1{,}5+3{,}8} = 2^{5{,}3}$

Samme eksponent: $2^4 \cdot 3^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 \cdot 3\cdot3\cdot3\cdot3$

$= 2\cdot3 \cdot 2\cdot3 \cdot 2\cdot3 \cdot 2\cdot3 = (2\cdot3)^4$

Eks $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2\cdot3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\cdot3}$

Mønster $a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$

Oppg Beregn $1{,}12^{-1}$ på kalkulatoren.

Løsning 1: 1,12 $\boxed{y^x}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$

Løsning 2: 1,12 $\boxed{1/x}$ (fordi $1{,}12^{-1} = \frac{1}{1{,}12}$)

Absoluttverdi

Eks $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3 = -(-3) = |-3|$

så $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$

Oppg 7j Løs likn. $x|x| = 9$

To tilfeller: $x \geq 0$ gir likn. $x^2 = 9$ med løsn. $x = 3$

$x < 0$ gir likn. $x\cdot(-x) = 9$ dvs $-x^2 = 9$

dvs $x^2 = -9$ har ingen løsninger.

2. Relativ endring og vekstfaktor

$$\text{Relativ endring} = \frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}}$$

Husk: $\% = \frac{1}{100} = 0,01$

$3\% = 3 \cdot \frac{1}{100} = 0,03$

Eks Kåres timelønn har økt fra 163 kr til 181 kr. Da er den relative endringen

$$\frac{181 \text{ kr} - 163 \text{ kr}}{163 \text{ kr}} = \frac{18}{163} = 11,0\,\%$$

Vekstfaktor = 1 + relativ endring

Eks Vekstfaktoren til Kåres timelønnsøkning er $1 + 11,0\,\% = 1,110$

Oppg I fjor tjente Kåre 54 000 (m. 163 kr/time). Hva vil han tjene i år hvis han jobber like mye (med den nye timelønnen)?

Løsning $54000 \cdot 1,11 = \underline{\underline{59940}}$

3. Renter

Eks Du setter 40 000 på en konto som gir 2,3 % årlig rente. Rentene kapitaliseres (legges til kapitalen) hvert år, etterskuddsvis. Etter ett år er balansen (hva som står på kontoen) gitt som

$$40000 + 40000 \cdot 2{,}3\,\%$$

$$= 40000 \cdot (\underbrace{1 + 2{,}3\,\%}_{\text{vekstfaktor}}) = \underline{\underline{40920{,}00}}$$

Oppg Hva er balansen etter 5 år?

Løsning

nå

0 1 2 .... 5 tids-linje

$$40\,000 \xrightarrow{\cdot 1{,}023} 40' \cdot 1{,}023 \xrightarrow{\cdot 1{,}023} 40' \cdot 1{,}023^2 \xrightarrow{\cdot 1{,}023^3} 40' \cdot 1{,}023^5$$

$$\underline{\underline{40\,000 \cdot 1{,}023^5}} = \underline{\underline{44\,816{,}52}}$$

Eks Hvis rentene kapitaliseres kvartalsvis er vekstfaktoren for ett kvartal

$$1 + \frac{2{,}3\,\%}{4} = 1{,}00575$$

Balansen etter ett år : $40000 \cdot 1{,}00575^{4}$

Balansen etter 5 år : $40\,000 \cdot 1{,}00575^{5 \cdot 4}$

Vi sier at 2,3 % er den nominelle (års)renten

Årlige vekstfaktor er $1{,}00575^{4} = 1{,}023199$

Den effektive renten er 2,3199 %

Mønster

nominell rente

antall terminer totalt

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m}$$

balansen etter m terminer

innskudd

antall rente terminer pr. år

---

4. Nåverdi

La K_0 være en investering / innskudd / betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (eller terminer) med terminrente r

er $K_n = K_0 \cdot (1+r)^{n}$

Omvendt Anta K_n skal betales om n år. Da er nåverdien K_0 av K_n med rente r gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Oppg Bestem nåverdien av 30 mill. utbetalt om 5 år med 8% rente.

Løsning $K_0 = \frac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = \underline{\underline{20{,}42 \text{ mill}}}.$