MET 1180, 21. forelesning, 15 Nov 2022, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon (oppg. fra forrige uke)
   1d implisitt derivasjon
   2 implisitt definerte kurver
   5b Grafene til $f$, $f'$, $f''$
   6b konkave/konvekse funksjoner
2. L'Hôpitals regel

## 1. Repetisjon

Oppg 1d
$$x^3 - 3xy + y^2 = 0 \qquad (*)$$

Vi finner et uttrykk for $y'$ i $y$ og $x$ ved å derivere begge sider av likningen med hensyn på $x$. Får en ny likning med $x$, $y$ og $y'$ og løser den for $y'$.

Hjelperegninger:

Produktregelen gir $(x \cdot y)'_x = (x)'_x \cdot y + x \cdot y'_x$
$$= 1 \cdot y + x \cdot y'_x = y + xy'$$

Kjerneregelen gir $(y^2)'_x = 2y \cdot y'_x$

Fra $(*)$ får vi da
$$3x^2 - 3(y + xy') + 2yy' = 0$$

dvs $\quad 3x^2 - 3y - 3xy' + 2yy' = 0$

$$(2y - 3x)y' = 3y - 3x^2 \qquad \Big| : (2y - 3x)$$

Da er $$y' = \frac{3y - 3x^2}{2y - 3x} = \frac{3(y-x^2)}{2y-3x}$$

Antar $x = 2$ og løser $(*)$ innsatt $x = 2$

dvs $$2^3 - 3 \cdot 2 \cdot y + y^2 = 0$$
$$y^2 - 6y = -8$$
$$(y-3)^2 = -8 + 9 = 1$$

som gir $y - 3 = 1$ el. $y - 3 = -1$

$$y = 4 \quad \text{el.} \quad y = 2$$

Vi bruker ettpunktsformelen til å finne tangentfunksjonene i punktene $(2,4)$ og $(2,2)$ på kurven.

$(2,4)$ $$y' = \frac{3(4-2^2)}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0$$

så tangenfunksjonen er konstant: $h_1(x) = 4$

$(2,2)$ $$y' = \frac{3(2-2^2)}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 2} = \frac{3 \cdot (-2)}{-2} = 3$$

Ettpunktsformelen gir $h_2(x) - 2 = 3(x-2)$

dvs $h_2(x) = 3x - 4$

②

Oppg 2 Elliminasjon er strategien.

I oppg 1a, c og d er to y-verdier for en x-verdi
Ingen av disse kan derfor være den blå kurven
(den til høyre) så
1b må derfor være den blå.

Den røde (til venstre) og den grønne (nederst)
er symmetriske om horisontale linjer.
Da er også to tangenter med samme x-verdi
symmetriske, dvs har like stigningstall
bare med motsatt fortegn. Dette gjelder
bare 1a og c. Så 1d må være den fiolette

Hvis de tykke linjene i koordinatsystemene
er koordinatakser vil den røde grafen
gi en positiv og en negativ y-verdi for
en gitt x-verdi, mens den grønne
gir to positive y-verdier. Dermed
er 1a den grønne og 1c den røde grafen

skulle også tegne inn tangentene.

Start: 15.00

Oppg 5b  I praksis er det umulig å vise direkte at en graf er den deriverte til en annen.

Strategi  Anta at en graf er $f(x)$, og vis at det er galt. Gjenta.

① Antar at den blå (den øvre) er $f(x)$.
(men jeg tenker at den ikke er det)
Da er den deriverte $f'(x)$ stigningstallet til tangenten til den blå kurven som er (veldig) nær 0 for $5{,}5 \leq x \leq 6$.
Men ingen av de to andre grafene er (nær) 0 i dette intervallet.
Altså er antagelsen gal. Den blå er ikke $f(x)$.

② Antar at den oransje (den midterste) er $f(x)$. (men jeg tenker at den ikke er det)
Da er $f'(x)$ tilnærmet 0 for $5 \leq x \leq 6$.
(flat tangent). Da må $f'(x)$ være den blå, og dermed er $f''(x)$ den olivenfarvede.
Men $f''(x) = [f'(x)]'$ er tilnærmet 0 for $5{,}5 \leq x \leq 6$ (som i ①) så dette er galt.

③ Konklusjon
$f(x)$ er den olivenfarvede (den nederste)
$f''(x)$ er den blå (den øverste)
$f'(x)$ er den oransje

Oppg 6b $\quad f(x) = \ln(x^2-2x+2) - \frac{x}{4} + 1$

Merk $\quad x^2-2x+2 = (x-1)^2+1 \geq 1$ så

$f(x)$ er definert på hele tallinjen.

Kjerneregelen for $[\ln(x^2-2x+2)]'$

$u = x^2-2x+2$ og $g(u) = \ln(u)$

$u' = 2x-2 \qquad g'(u) = \frac{1}{u}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 0$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}}}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)'(x^2-2x+2) - (2x-2)(x^2-2x+2)'}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-2x+2) - (2x-2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

litt regning

$$= \underline{\underline{\frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}}} = \frac{-2x(x-2)}{[(x+1)^2+1]^2}$$

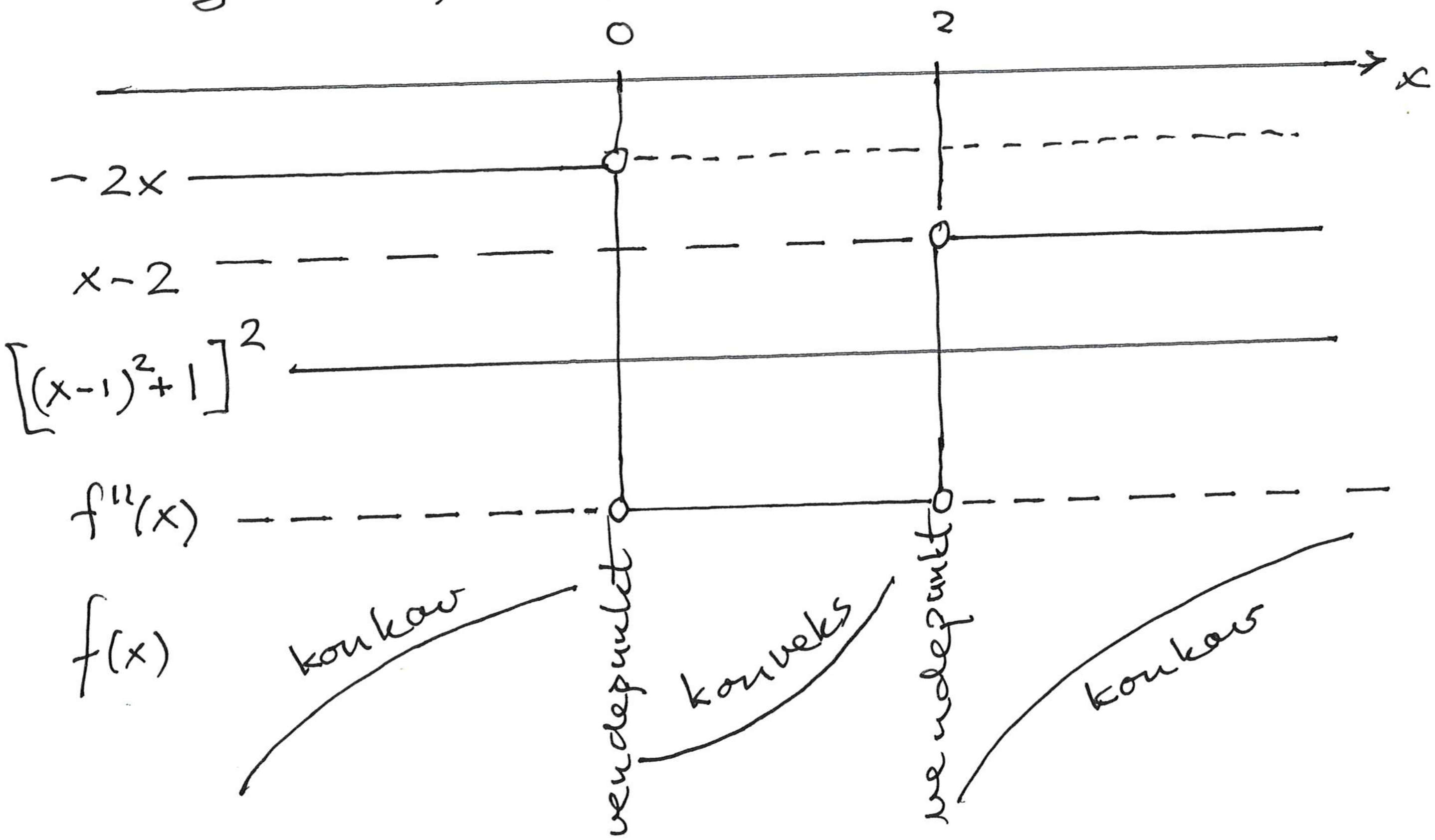
Løser likningen $f''(x) = 0$

dvs $-2x(x-2) = 0$ (fordi nevneren $\geq 1$)

dvs $-2x = 0$ el. $x - 2 = 0$

dvs $\underline{\underline{x = 0}}$ el. $\underline{\underline{x = 2}}$

Skal finne hvor $f(x)$ er konveks/konkav, tegner fortegnsskjema for $f''(x)$.




<u>Konklusjon</u> $f(x)$ er konkav for $x$ i $\langle \infty, 0]$

$f(x)$ er konveks for $x$ i $[0, 2]$

$f(x)$ er konkav for $x$ i $[2, \infty\rangle$

Dermed er $\underline{\underline{x=0}}$ og $\underline{\underline{x=2}}$ vendepunkter

(fordi $f''(x)$ skifter fortegn for $x=0$ og $x=2$)

## 2. l'Hôpitals regel

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

**Skrivemåte** $\lim_{x\to 5} f(x)$ er tallet som $f(x)$ nærmer seg mer og mer når $x$ nærmer seg 5 mer og mer.

**Eks** $f(x) = \dfrac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim_{x\to 1} f(x)$.

teller: $3x - 3 \xrightarrow[x\to 1]{} 3\cdot 1 - 3 = 0$

nevner: $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(1) = 0$

Altså $\frac{0}{0}$ - uttrykk

Kan bruke l'Hôpital for å komme videre:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(3x-3)'}{[\ln(x)]'} = \lim_{x\to 1} \frac{3}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

f. eks. $f(0{,}99) = \dfrac{3\cdot 0{,}99 - 3}{\ln(0{,}99)} = 2{,}9850$

og $f(1{,}01) = \dfrac{3\cdot 1{,}01 - 3}{\ln(1{,}01)} = 3{,}0150$

NB Må være $\frac{0}{0}$ el. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Da deriverer vi teller og nevner hver for seg og prøver å finne grensen til den nye brøken.

Eks $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{e^x - 1}$

teller: $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 3 \cdot 0 = 0$

nevner: $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 - 1 = 0$

så $\frac{0}{0}$.

$$\overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3}{e^x} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

Eks $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$

" $\frac{\infty}{\infty}$ "