MET1180, 22. forelesning, 17. nov. 2022, Runar Ile

Plan
1. Grensekostnad og grenseinntekt
2. Kostnadsfunksjoner, kostnadsoptimum og optimal enhetskostnad

1. Grensekostnad, grenseinntekt, osv.

Intro: Diamanter og vann

Eks: Kostnaden ved å fjerne x % av forurensningen i en innsjø.

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter (av en vare)

$K'(x)$ er grensekostnaden ved x (marginal kostnad)

Tolkning Hva koster det å produsere én enhet mer enn x enheter?

$$= K(x+1) - K(x) = \frac{K(x+1) - K(x)}{1} \approx \lim_{h \to 0} \frac{K(x+h) - K(x)}{h} = K'(x)$$

Hvorfor $K'(x)$? – mye enklere matematikk.

$I(x)$ er inntekten av å selge x enheter

$I'(x)$ er grenseinntekten —— " ——

Eks x = antall tonn laks solgt

$I'(50)$ = ekstra inntekt ved å selge ett tonn mer enn 50 tonn.

fordi $I'(50) \approx I(51) - I(50)$

Profittfunksjonen (x = ant. produserte og solgte enheter)

$$P(x) = I(x) - K(x) \qquad (\text{ofte } \Pi(x))$$

$P'(x)$ er grenseprofitten ved x

NB: $P'(x) = I'(x) - K'(x)$

---

2. Kostnadsoptimum og optimal enhetskostnad

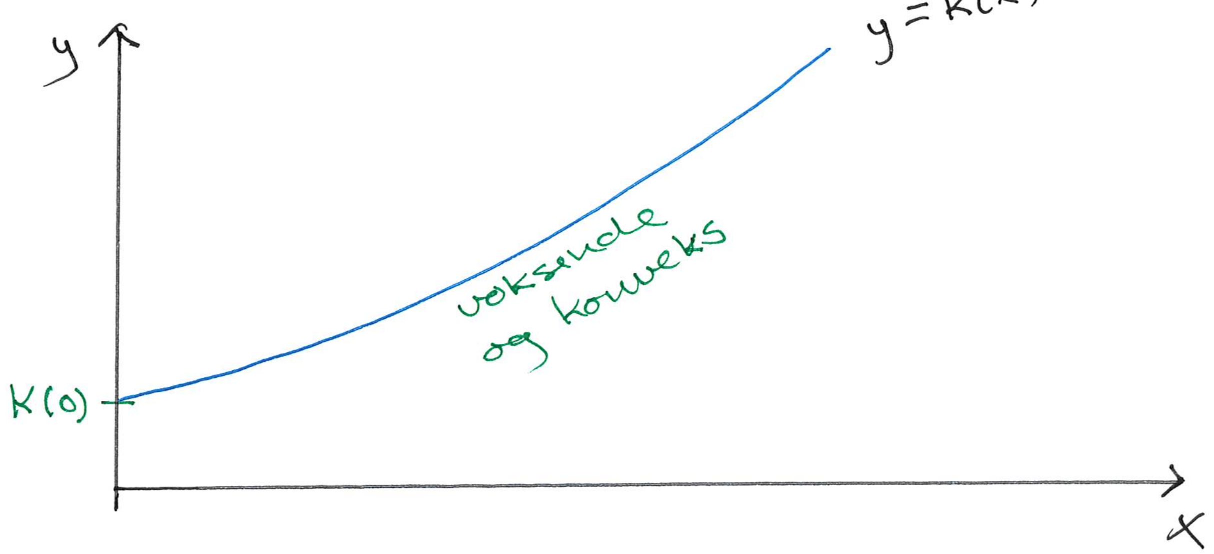
Den gjennomsnittlige Enhetskostnaden ved å produsere x enheter

er $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ – ikke en konstant funksjon !!

"average unit cost"

Definisjon $K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

1. $K(0) > 0$ (startkostnader)
2. $K(x)$ er voksende ($K'(x) \geq 0$)
3. $K(x)$ er konveks ($K''(x) \geq 0$)



Definisjon Hvis $x = c$ er minimumspunktet for $A(x)$, kalles c for kostnadsoptimum.

- dvs x-verdien som gir lavest gjennomsnittlig enhetskostnad

Resultat Hvis $K''(x) > 0$ for alle $x > 0$ så er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x)$$

Start: 9.00

Eks $K(x) = x^2 + 200x + 160\,000$

Dette er en kostnadsfunksjon fordi:

1. $K(0) = 160\,000 > 0$
2. $K'(x) = 2x + 200 > 0$ for $x \geq 0$
3. $K''(x) = 2 > 0$ for alle x

så $K(x)$ er strengt konveks.

Ved resultatet er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$2x + 200 = \frac{x^2 + 200x + 160\,000}{x}$$

dvs $$\cancel{2}x + \cancel{200} = \cancel{x} + \cancel{200} + \frac{160\,000}{x}$$

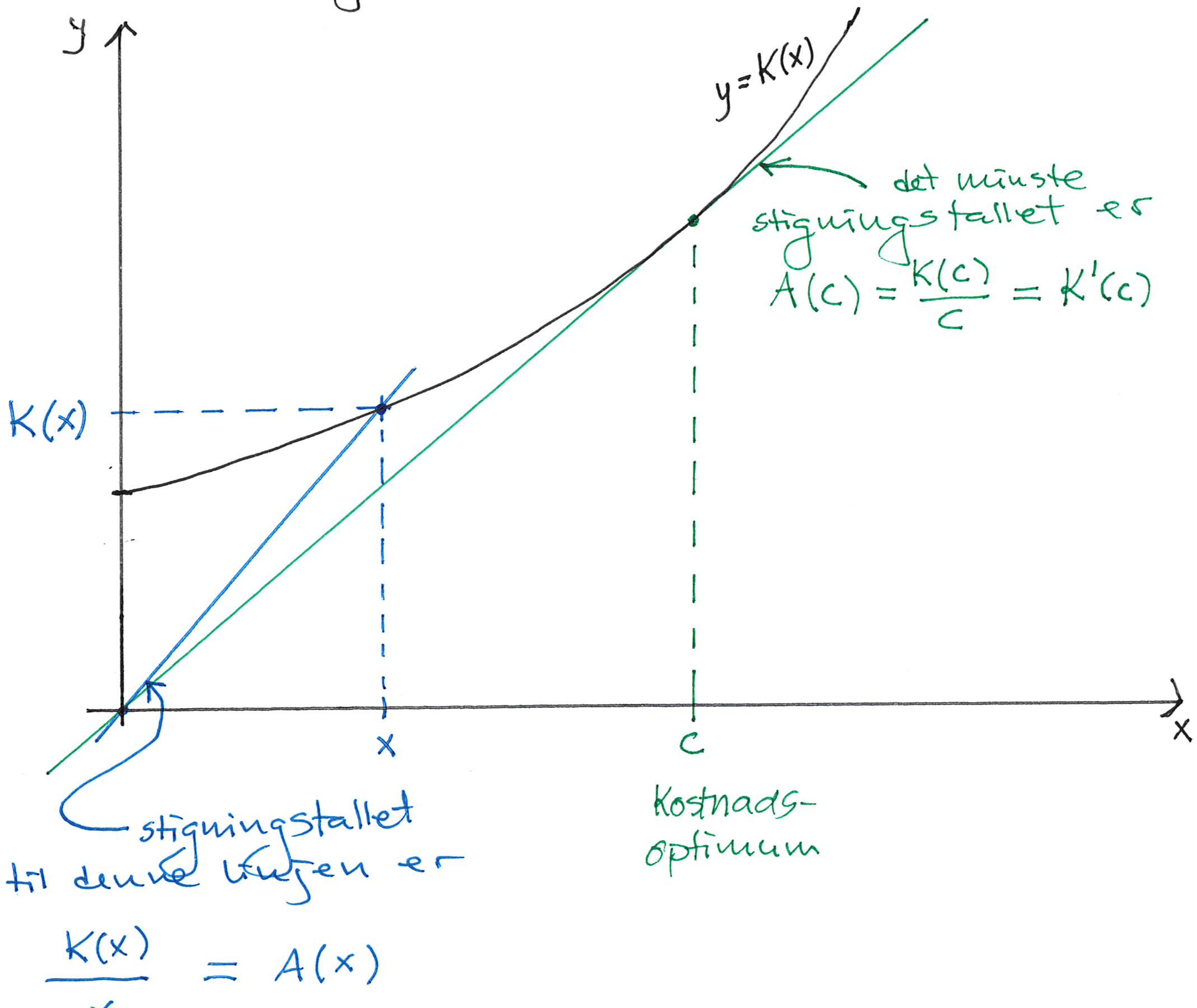
$$x = \frac{160\,000}{x}$$

så $x^2 = 160\,000$ dvs $\underline{\underline{x = 400}}$ er kostnadsoptimum

Minimal gjennomsnittlig enhetskostnad er

$$A(400) = K'(400) = 2 \cdot 400 + 200 = \underline{\underline{1000}}$$

Geometrisk argument for resultatet



Så $A(c) = \dfrac{K(c)}{c}$ er minimal enhetskostnad

når $K'(c) = A(c)$ = det minste stigningstallet til linjen gjennom origo

= stigningstallet til tangenten som går gjennom origo.

Algebraisk begrunnelse

Finner det stasjonære punktet til $A(x) = \dfrac{K(x)}{x}$

Beregner

$$A'(x) = \left[\frac{K(x)}{x}\right]' \overset{\text{brøkregelen}}{=} \frac{K'(x)\cdot x - K(x)\cdot(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{K'(x)\cdot x - K(x)}{x^2} \qquad \Bigg| \; \frac{:x}{:x}$$

$$= \frac{K'(x) - A(x)}{x}$$

Så $A'(x) = 0$ er ekvivalent med at $K'(x) = A(x)$.

Anta $x = c$ er et slikt stasjonært punkt, så $K'(c) = A(c)$

dvs $A'(c) = 0$. Bruker andrederiverttesten:

Hvis $A''(c) > 0$ så er $x = c$ et (lok.) minimumspunkt.

Regner: $$A''(x) = \frac{[K'(x) - A(x)]'\cdot x - [K'(x) - A(x)]\cdot(x)'}{x^2}$$

$$= \frac{[K''(x) - A'(x)]\cdot x - [K'(x) - A(x)]}{x^2}$$

Substituerer $x = c$:

$$A''(c) = \frac{[K''(c) - \underset{=0}{A'(c)}]\cdot c - [\overbrace{K'(c) - A(c)}^{=0}]}{c^2}$$

$$= \frac{K''(c)\cdot \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}} = \frac{K''(c)}{c} > 0 \quad (\text{for } c > 0)$$