MET 1180, 23. forelesning, 22. nov. 2022, Runar Ile

Plan 1. Repetisjon: l'Hôpitals regel (oppg 1h)
Kostnadsfunksjoner (oppg 3c)

2. Elastisitet (kap. 4.9)

1. Rep: l'Hôpitals regel For grenser: $\frac{0}{0}$ el. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- Deriverer teller og nevner hver ~~for~~ seg.
- Prøver å finne grensen til den nye brøken.

Oppg 1h $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{l'Hôp.}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1}\right)}{\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{2}}$

" $\frac{0}{0}$ "

Også $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}$ $\Big|\ \frac{\cdot x\cdot 2\sqrt{x}}{\cdot x\cdot 2\sqrt{x}} = 1$

" $\frac{\infty}{\infty}$ "

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$

Betydningen av at $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} = 0$

er at den horisontale linjen $y = 0$ ~~er~~ en horisontal asymptote for funksjonen $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$, dvs at grafen nærmer seg x-aksen mer og mer når x vokser uten grenser.

Rep.: Kostnadsfunksjoner

$K(x)$ er en kostnadsfunksjon hvis

($x \geq 0$) og x er ant. prod. enheter

1. $K(0) > 0$
2. $K(x)$ er voksende $(K'(x) \geq 0)$
3. $K(x)$ er konveks $(K''(x) \geq 0)$

Gjennomsnittlig enhetskostnad $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

Kostnadsoptimum : Minimumspunktet for $A(x)$ (altså x-verdien)

Fint resultat : Hvis $K''(x) > 0$ for $x > 0$

så er kostnadsoptimum løsningen på likningen $A(x) = C'(x)$.

Oppg 3c $K(x) = 400 \cdot e^{0{,}001 \cdot x^2}$ $(x \geq 0)$

er en kostnadsfunksjon fordi

1. $K(0) = 400 \cdot e^{0{,}001 \cdot 0^2} = 400 \cdot e^0 = 400 > 0$
2. $K'(x) \overset{\text{kjerne-regel}}{=} 400 \cdot 0{,}001 \cdot 2x \cdot e^{0{,}001 \cdot x^2}$

$$= \underbrace{0{,}8 \cdot x}_{\geq 0 \text{ for } x \geq 0} \cdot \underbrace{e^{0{,}001x^2}}_{\geq 0} \geq 0 \text{ for } x \geq 0.$$

3. $K''(x) \overset{\text{prod. reg.}}{=} 0{,}8 \cdot e^{0{,}001x^2} + 0{,}8x \cdot 0{,}001 \cdot 2x \cdot e^{0{,}001x^2}$

$$= \underset{>0}{0{,}8}\underbrace{(1 + 0{,}002x^2)}_{>0}\underset{>0}{e^{0{,}001 \cdot x^2}} > 0$$

Fordi $K''(x) > 0$ er kostnadsoptimum løsningen til likningen

$$K'(x) = A(x)$$

dvs $\quad 0{,}8x\, e^{0{,}001x^2} = \dfrac{400 \cdot e^{0{,}001x^2}}{x} \quad \Big| \cdot x$

gir $\quad 0{,}8x^2 \cdot e^{0{,}001x^2} = 400 \cdot e^{0{,}001x^2} \quad \Big| : e^{0{,}001x^2}$

gir $\quad 0{,}8x^2 = 400$

så $\quad x^2 = \dfrac{400}{0{,}8} = 500$

og $\quad x = \underline{\underline{\sqrt{500}}} = \underline{\underline{22{,}36}} \qquad (x \geq 0)$

Da er den minimale enhetskostnaden

$$A(\sqrt{500}) \overset{\text{fint result.}}{=} K'(\sqrt{500}) = 0{,}8 \cdot \sqrt{500} \cdot \underbrace{e^{0{,}001 \cdot \sqrt{500}^2}}_{e^{0{,}5}}$$

$$= \underline{\underline{29{,}49}}$$

Start: 15.02

---

2. Elastisitet $\qquad p$ = pris/enhet

$D(p)$ = etterspørselen hvis prisen er p

Problemet med enheter.

Eks Et fat Nordsjøolje koster \$ 87,53

En liter —"— koster NOK 5,64

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

disse tallene er uavhengig av enheter

Eks På en måned synker prisen på en vare fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill. til 60 mill.

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\left(\frac{10}{50}\right)}{\left(\frac{-2}{12}\right)} = \frac{120}{-100} = \underline{\underline{-1,2}}$$

Tolkning Hvis prisen øker med 1 % fra 12 tusen vil etterspørselen falle med 1,2 %.

Teori Vi har en etterspørselsfunksjon $D(p)$.

Anta prisen endres fra p til $p+h$.

Da er relativ prisendring $\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}$

Da er

$$\frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\dfrac{h}{p}\right)} \qquad \Big| \cdot \frac{p \cdot D(p)}{p \cdot D(p)} = 1$$

$$= \frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\Big\downarrow \; h \to 0 \quad \text{(prisendringen nærmer seg 0)}$$

$$\boxed{\mathcal{E}(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}}$$

Dette er den momentane priselastisiteten til etterspørselsfunksjonen $D(p)$.

Eks $D(p) = 50 - p$ for $0 < p < 50$

Da er $D'(p) = -1$ så $\mathcal{E}(p) = \dfrac{(-1) \cdot p}{50 - p}$

$$= \underline{\underline{\frac{-p}{50-p}}}$$

Viktig spørsmål Vil inntekten gå opp eller ned hvis prisen øker litt?

Svar:

Inntekt $I(p) = p \cdot D(p)$

– er $I(p)$ avtagende eller voksende?

Marginalinntekten med hensyn på prisen

er $I'(p) \overset{\text{prod. reg.}}{=} 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$

$$= D(p) \cdot \left[1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}\right]$$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \cdot \underbrace{\left[1 + \varepsilon(p)\right]}_{\text{pos. el. neg. ?}}$$

Hvis $\varepsilon(p) < -1$
får vi neg. $I'(p)$
så $I(p)$ er avtagende
– elastisk etterspørsel

Hvis $\varepsilon(p) > -1$
får vi pos. $I'(p)$
så $I(p)$ er voksende
– uelastisk etterspørsel

Hvis $\varepsilon(p) = -1$
er $I'(p) = 0$
$I(p)$ har et stasjonært punkt
– nøytralelastisk etterspørsel

Eks (forts) $D(p) = 50 - p$, $0 < p < 50$

$$\varepsilon(p) = \frac{-p}{50-p}$$

Spørsmål For hvilke p vil etterspørselen være elastisk?

Svar: Løser ulikheten $\varepsilon(p) < -1$

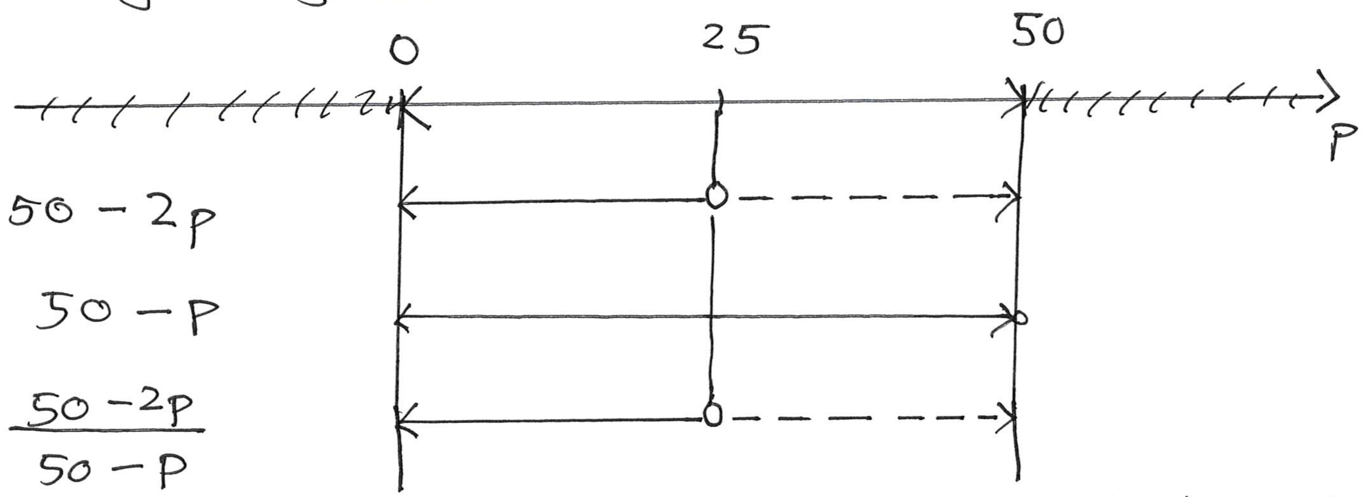
dvs $$\frac{-p}{50-p} < -1 \qquad | +1$$

$$\frac{-p}{50-p} + 1 < 0 \qquad \text{setter på en brøk}$$

$$\frac{-p+50-p}{50-p} < 0$$

$$\frac{50-2p}{50-p} < 0$$

Fortegnsskjema:



så elastisk etterspørsel for p i intervallet $\langle 25, 50 \rangle$

og uelastisk ——— " ——— $\langle 0, 25 \rangle$

og nøytral-elastisk ——— " ——— $p = 25$