
 Plan

- 1 Ubestemte integraler og antideriverte funksjoner
 - 2 Grunnleggende integrasjonsregler
-

Om vår semesteret:

Kontrolltid: Ons 12-14

Veiledning: Tors 12-?

Ⓐ Integrasjon

Ⓑ Vektorer og matriser

Ⓒ Funksjoner i to variabler

Eksamen: - fagoppgave 20/03
- eksamen (80%) 24/05

① Ubestemte integraler og antideriverte funksjoner

La $f(x)$ være en funksjon definert på et intervall $I = [a, b]$.

Defn: En antiderivert til $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

Eksempel: $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$
 $F(x) = x^2 + 7$

Resultat:

Anta $f(x)$ er en kontinuerlig funksjon på I . Da har vi:

(i) $f(x)$ har en antiderivert $F(x)$

(ii) Hvis $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$, så er

alle de antideriverte til $f(x)$ gitt ved $F(x) + C$

den generelle antideriverte til $f(x)$

Eksempel:



$r = 3 \text{ cm}$ $R = 11 \text{ cm}$

$L = 0.05 \text{ cm}$

(tykkelsen på toalettpapir)

Hva er total lengde med toalettpapir?

Defn: Det ubestemte integralet

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

integrasjons-
tegnet \int
 integrand $f(x)$
 x er
 integrasjonsvariabelen
 ubestemt
 integral

der $F(x)$ er en antiderivert
 til $f(x)$, dvs $F'(x) = f(x)$

Ekse: $\int 2x dx = \underline{\underline{x^2 + C}}$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} x \sqrt{x} + C}}$$

integrasjonskonstante C

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$(x^{3/2})' = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2}$$

$$\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$= \sqrt{x}$$

② Integrasjonsregler:

(a) Potensregelen: $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(b) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

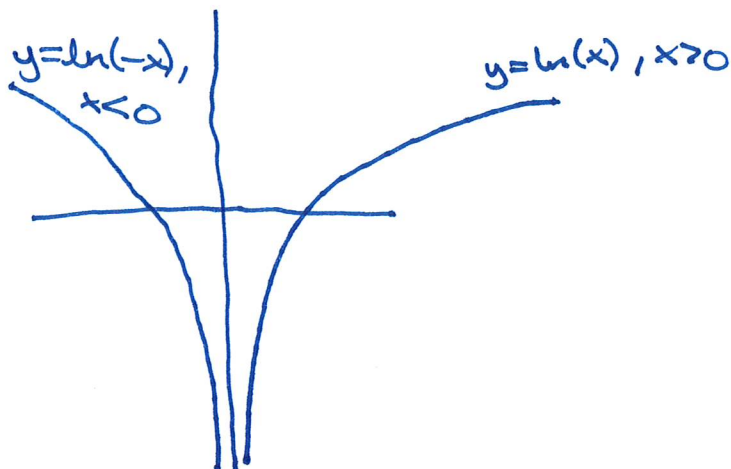
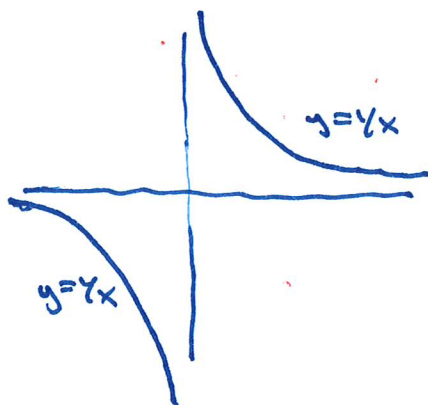
(c) $\int u(x) \pm v(x) dx = \int u(x) dx \pm \int v(x) dx$

(d) $\int c \cdot u(x) dx = c \cdot \int u(x) dx \quad (c \text{ konstant})$

(e) $\int e^x dx = e^x + C$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C \quad (a > 0)$$

Ek: $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$



$$\underline{x < 0}: (\ln(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

$$\ln |x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Ek:

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 + C \quad \begin{array}{l} n=3 \rightarrow \\ n+1=4 \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} + C \quad \begin{array}{l} n=-2 \rightarrow \\ n+1=-1 \end{array}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{x} + C}}$$

$$\int x \cdot \sqrt[3]{x} dx = \int x \cdot x^{1/3} dx = \int x^{4/3} dx \quad \begin{array}{l} n=4/3 \\ n+1=7/3 \end{array}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot x^{7/3} + C = \underline{\underline{\frac{3}{7} \cdot x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + C}}$$

$$\underline{\text{E6:}} \quad \int x^2 + x^3 dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\int \frac{1-x^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x} dx = \int \frac{1}{x} - x dx$$

$$= \underline{\underline{\ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

$$\int 9x^2 - 12x^3 dx = \int 9x^2 dx - \int 12x^3 dx$$

$$= 9 \cdot \int x^2 dx - 12 \int x^3 dx$$

$$= 9 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + C \right) - 12 \left(\frac{1}{4}x^4 + C \right)$$

$$= 3x^3 + 9C - 3x^4 - 12C$$

$$= 3x^3 - 3x^4 + C$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 12 \cdot \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$= \underline{\underline{3x^3 - 3x^4 + C}}$$

$$\underline{\text{E6:}} \quad \int 12x^5 - 4x^3 + 12x^2 - 7x + 3 dx$$

$$= 12 \cdot \frac{x^6}{6} - 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 12 \cdot \frac{x^3}{3} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$= \underline{\underline{2x^6 - x^4 + 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + C}}$$

Mer avanserte integrasjonsteknikker

- i) Delvis integrasjon
- ii) Substitusjon
- iii) Delbrødsoppsettning

← "produktregelen baklengs"
 ← "kjøperegelen baklengs"
 ← istedenfor brødregelede

Ex: $\int x \cdot e^x dx$

| | |
|------------|----------|
| $u = e^x$ | $v = x$ |
| $u' = e^x$ | $v' = 1$ |

$$\begin{aligned}
 &= uv - \int uv' dx \\
 &= x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 dx \\
 &= x \cdot e^x - \int e^x dx \\
 &= \underline{\underline{x \cdot e^x - e^x + C}}
 \end{aligned}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(uv)' - uv' = u'v$$

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$