Plan

1 Matriser og matriseregning
2 Matrisemultiplikasjon
3 Transponering av matriser

Rep: Vektorer

Defn: vektor = kolonnevektor (n-vektor) $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Regneoperasjoner: add./subtrakj. $\underline{v} \pm \underline{w}$ ($\underline{v}, \underline{w}$ vektorer)

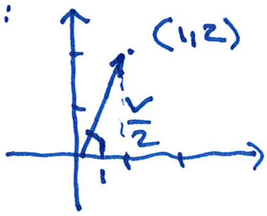
Skalar mult. $c \cdot \underline{v}$ (c tall)

Lineærkombinasjon: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$

$c_1 \cdot \underline{v}_1 + c_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + c_n \cdot \underline{v}_n$ (der $c_1 \dots c_n$ er hvilke som helst tall)

Geometrisk representasjon:

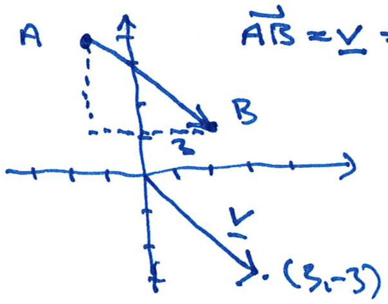
n=2: **Eks** $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$



En vektor er noe som har **størrelse** og **retning**

A = (-1,4) B = (2,1)

$\vec{AB} = \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$



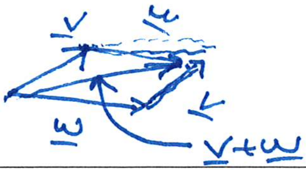
størrelse: ~~retning~~

lengden på pilen

$||\underline{v}||$ = lengden til vektoren $\underline{v}$

$= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \simeq 2.3$

retning: kan for eksempel måles vha vinkler



Lengden til en vektor:

$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$: $||\underline{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$

Eksamen 12/2021, 3c

$\underline{v_1} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ $\underline{v_2} = \begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix}$ $\underline{v_3} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\underline{v_4} = \begin{pmatrix}4\\a\\-3\end{pmatrix}$ $\underline{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$x_1 \cdot \underline{v_1} + x_2 \cdot \underline{v_2} + x_3 \cdot \underline{v_3} + x_4 \cdot \underline{v_4} = \underline{w}$ vektorlikning

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}4\\a\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + ax_4 &= 1 \\ 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & a & 1 \\ 5 & 12 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l}]\cdot(-3) \\ ]\cdot(-5) \\ \end{array}$$

3x4 lin. sys. med parameter a

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-12 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -23 & -10 \end{array}\right)]\cdot(-2) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & a-4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & 0 \end{array}\right)$$

$\underline{a \neq 1/2}$: en fri variabel $\underline{x_3}$ uendelig mange løsn.

$\underline{a = \frac{1}{2}}$: to frie var. $\underline{x_3, x_4}$ uendelig mange løsn.

konsistent for alle a $\Rightarrow$ $\underline{\text{alltid mulig}}$

Baklengs substitusjon:

$(1-2a) \cdot x_4 = 0 \Rightarrow$ en mulighet er $\underline{x_4 = 0}$

$x_2 - x_3 = -5 \Rightarrow x_2 = \underline{x_3 - 5}$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \quad x_1 = 2 - 2(x_3 - 5) - x_3$

$= \underline{12 - 3x_3}$

Løsn: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (12 - 3x_3, x_3 - 5, x_3, 0)$

$\to x_3 = 0$: $(12, -5, 0, 0)$

$\boxed{12\underline{v_1} - 5\underline{v_2} = \underline{w}}$

① Matriser og matriseregning

Defn: En $m \times n$-matrise er en rektangulær tabell med (m rader, n kolonner)

Eks:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$
2×3-matrise

Regneoperasjoner:

i) Addisjon/subtraksjon: $A+B$, $A-B$

(matrisene må ha samme størrelse)

Eks:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Skalarmultiplikasjon: $c \cdot A$

(c = et tall, A matrise)

Eks:
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

② Matrisemultiplikasjon: $A \cdot B$

$\underset{m\times n}{A} \quad \underset{n\times p}{B}$

kolonner i A = # rader i B

produktet blir $m \times p$

Eks:
$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Eks:
$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}}$$

$1\cdot 7 + 2\cdot 0 = 7$

$3\cdot 7 + (-1)\,0 = 21$

$1\cdot 1 + 2\cdot 0 = 1$

$3\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = 3$

Merk: 1) $\boxed{AB \neq BA}$ for matriser

2) "Alle" andre regneregler som før:

$$A\cdot(B+C) = AB + AC$$

$$A\cdot(BC) = (AB)\cdot C$$

$$\vdots$$

Eks:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Identitetsmatrisen I : En kvadratisk matrise med 1 på diagonalen og 0 utenfor —"—.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den har egenskapen: $\begin{cases} I\cdot A = A \\ A\cdot I = A \end{cases}$

4) Diagonale matriser Kvadratisk matrise der alt utenfor diagonalen er 0.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = D\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

5) Potenser:

Defn når A er kvadratisk

$$A^2 = A\cdot A$$

$$A^3 = (A\cdot A)\cdot A = A\cdot(A\cdot A)$$

$$\vdots$$

Eks: $m \times n$ lin. sys

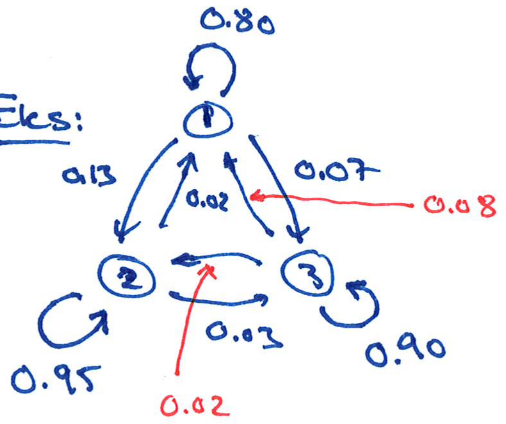
$$\left.\begin{aligned} x + y + z + w &= 4 \\ x - y + z - w &= 1 \\ x + 2y + 3z - 4w &= 5 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \quad \underline{\text{Matriseform:}} \quad A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

koeff. matrisen

$$A \cdot \underline{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}}_{3 \times 4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}}_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} x + y + z + w \\ x - y + z - w \\ x + 2y + 3z - 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Eks:



$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.80 & 0.02 & 0.08 \\ 0.13 & 0.95 & 0.02 \\ 0.07 & 0.03 & 0.9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ut fra (1)} & \text{ut fra (2)} & \text{ut fra (3)} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{til (1)} \\ \text{til (2)} \\ \text{til (3)} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_1 = A \cdot \underline{v}_0 = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.02 & 0.08 \\ 0.13 & 0.95 & 0.02 \\ 0.07 & 0.03 & 0.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

start — etter en periode

$$= \begin{pmatrix} \underline{0.80 \cdot 0.4} + \underline{0.02 \cdot 0.3} + 0.08 \cdot 0.3 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = A \cdot \underline{v}_1 \quad \cdots\cdots \quad \underline{v}_{10} = A^{10} \cdot \underline{v}_0$$
$$= A \cdot (A \cdot \underline{v}_0)$$
$$= A^2 \cdot \underline{v}_0$$

③ <u>Transponering</u>: $\underset{m\times n}{A} \rightsquigarrow \underset{n\times m}{A^T}$

<u>Eks</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2×3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ 3×2 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Defn</u>: A er symmetrisk hvis $\underline{A^T = A}$

<u>Eks</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ er symmetrisk

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$