Plan

1 Optimeringsproblem uten bibetingelser
2 Globale maksimums- og minimumsverdier

Fagoppgaven:
- ingen foreles. neste uke
- veiledning torsdag

tilgjengelig fra mandag

Nivåkurver: $f(x,y) = c \quad (z=c)$

Eks: $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 4y$

$$f(x,y) = c$$

$$2x^2 - 4x + y^2 + 4y = c$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = c + 2 \cdot 1 + 4$$

$$2(x-1)^2 + (y+2)^2 = c+6 \quad |:(c+6) \qquad \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 2(x-1)^2}{\frac{1}{2} \cdot c+6} + \frac{(y+2)^2}{c+6} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{(c+6)/2} + \frac{(y+2)^2}{c+6} = 1$$

$c > -6$: Ellipse, sentrum $(1,-2)$, halvakser $a = \sqrt{\frac{c+6}{2}}$, $b = \sqrt{c+6}$

$c = -6$: Punkt $(1,-2)$

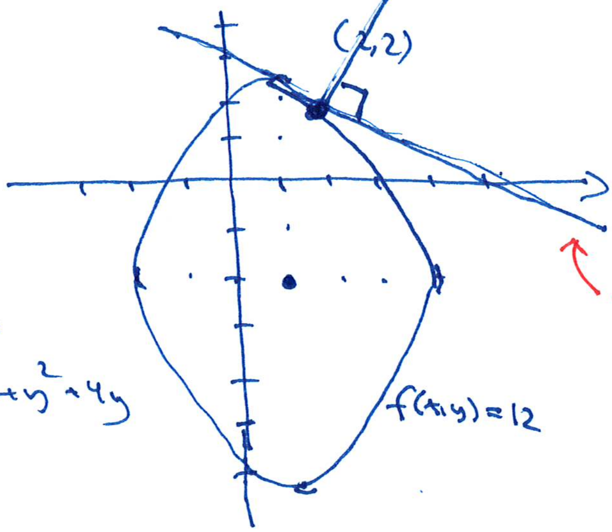
$c < -6$: Ingen pkt.

Eks. Tangenten til nivåkurven gjennom $(2,2)$.

$f(2,2) = 12 \Rightarrow$ Ser på $f(x,y) = 12$ $(c=12)$

$\nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 4y$



Tangenten til nivåkurven $f(x,y) = 12$ i $(2,2)$

$C = 12$:

Ellipse, sentrum $= (1,-2)$, halvakser $a = 3$

$b = \sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2} \simeq 4.2$

$$y - 2 = -\tfrac{1}{2} \cdot (x-2)$$
$$y - 2 = -\tfrac{1}{2} \cdot x + 1$$
$$y = \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}x + 3}}$$

Stigningstallet til en nivåkurve for f:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{4x-4}{2y+4}$$

$$y'(2,2) = -\frac{4}{8} = \underline{-\tfrac{1}{2}}$$

Gradienten: $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix}$ kalles gradienten til f

Eks: $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 4y$

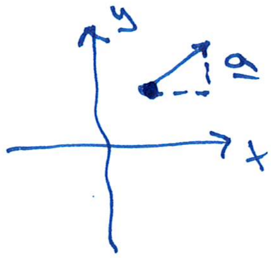
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x-4 \\ 2y+4 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Egenskaper: i) $\nabla f \perp$ tangenten til nivåkurven til f

(∇f står vinkelrett på tangenten til nivåkurven til f)

ii) Retningen på gradienten er den retningen hvor f vokser raskest.

Den retningsderiverte til f

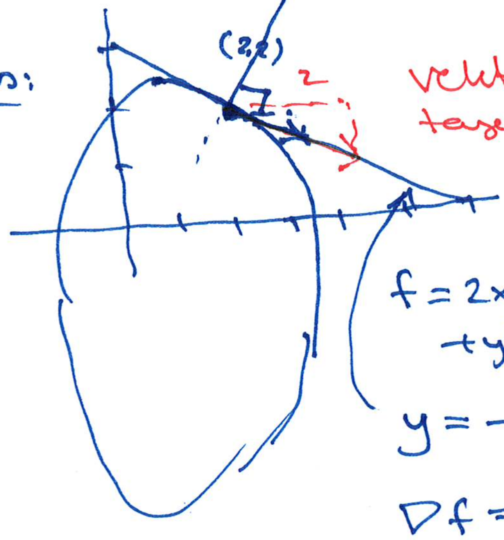


$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$: $f'_{\underline{a}} = \underline{a} \cdot \nabla f$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \cdot f'_x + a_2 \cdot f'_y$$

Eks:



$\nabla f = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\Bigg\}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) = 0$

Vektor langs tangenten: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$f = 2x^2 \cancel{+} - 4x + y^2 + 4y$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ i $(2,2)$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 4x-4 \\ 2y+4 \end{pmatrix}$

$\nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$: $f'_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 16 + 64 = \underline{\underline{80}}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$: $f'_{\underline{a}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \nabla f = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = -16 - 64 = \underline{\underline{-80}}$

Generelt:

$\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$

langs tang. $\begin{pmatrix} 1 \\ -f'_x/f'_y \end{pmatrix} = \underline{a}$

$\nabla f \cdot \underline{a} = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -f'_x/f'_y \end{pmatrix}$

$= f'_x + (-f'_x) = 0$

Altså er ∇f vinkelrett/normal på tangenten.

$f'_{\underline{a}} = \underline{a} \cdot \nabla f = 0$ når $\underline{a}$ går langs tangenten.

① Optimeringsproblem (i to variabler) uten bibetingelser

max/min $f(x,y)$

Eks: max/min $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

Metode:

① Finn alle stasjonære pkt for f: $\boxed{f'_x = 0,\ f'_y = 0}$ (FOC)

Eks: $f'_x = 3x^2 - 3y = 0$ $\quad \boxed{x^2 - y = 0}$

$f'_y = -3x + 3y^2 = 0$ $\quad \boxed{-x + y^2 = 0}$

$y = x^2 \rightarrow -x + (x^2)^2 = 0$

$-x + x^4 = 0$

$-x(1 - x^3) = 0$

$x = 0$ eller $x^3 = 1$

$y = 0$ $\qquad x = 1$

$\qquad\qquad y = 1$

Stasjonære pkt: $(x,y) = \underset{f=0}{(0,0)}, \underset{f(1,1)=-1}{(1,1)}$

② Sjekk om det er andre kandidatpkt for max/min.

Eks: Nei.

Konklusjon så langt:

$f(0,0) = 0$ kandidat for max

$f(1,1) = -1$ -"- for min

Teori:

Hvis (x^*,y^*) som er max/min for f, da har vi:

i) (x^*,y^*) stasj. pkt

ii) $f'_x(x^*,y^*)$ eller $f'_y(x^*,y^*)$ eksisterer ikke

iii) (x^*,y^*) er randpkt.

$y = -x^2$ $\qquad y = \sqrt{x}$ $\qquad y = x$, x i $[0,1]$

Fellesnavn for i), ii), iii): kandidatpkt

for i), ii): kritiske pkt

③ For alle stasjonære pkt:

Klassifiser (x^*, y^*) som lokalt max, lokalt min, eller sadelpkt vha andrederivert-testen

Teori: Se på matrisen
$H(f)(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$
for et stasj. pkt (x^*, y^*):

$\left.\begin{array}{l} \det = AC - B^2 > 0 \\ tr = A + C > 0 \end{array}\right\}$ lok. min

$\left.\begin{array}{l} \det = AC - B^2 > 0 \\ tr = A + C < 0 \end{array}\right\}$ lok. maks

$\det = AC - B^2 < 0 \}$ sadelpkt

$\det = AC - B^2 = 0 \}$ ingen konklusjon (vet ikke)

1 eks: $(0,0), (1,1)$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

$(0,0)$: $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = -9 < 0 \Rightarrow (0,0)$ sadelpkt

$(1,1)$: $H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \det = 27 > 0 \\ tr = 12 > 0 \end{array}$ $\Rightarrow (1,1)$ lokalt min

④ Klassifiser evt andre kandidatpkt

(a) Stasjonære pkt (x^*, y^*) ved $\det H(f)(x^*, y^*) = 0$

(b) Evt kandidatpkt som ikke er stasjonære

Def. eller ad hoc

1 eks: $(0,0)$ sadelpkt (ikke maks) $\Rightarrow$ Ingen max

$(1,1)$ lokalt min $\Rightarrow$ Kan fortsatt være min (men må sjekkes)

⑤ Sjekk om lokale max/min også er globale max/min.

$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f(1,1) = -1 \qquad f(-2,0) = (-2)^3 = -8 < -1$

$\Bigg\}$ $(1,1)$ ikke globalt min $\Downarrow$ ingen min