Plan

$$\boxed{\text{max/min } f(x,y) \quad \text{når} \quad g(x,y)=a}$$

1 Degenerert bibetingelse = unntakstilfeller!

Defn: Bibetingelsen $g(x,y)=a$ er degenerert hvis $g'_x=0$ og $g'_y=0$.

Merk: Tillatte punkt med degenerert bibetingelse kan gi maks/min og vi må se på disse unntakspunktene i tillegg til vanlige kandidatpkt.

$$\boxed{\begin{matrix} g'_x=0 \\ g'_y=0 \\ g(x,y)=a \end{matrix}}$$

$$L = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$$

$$\left.\begin{matrix} L'_x=0 \\ L'_y=0 \end{matrix}\right\} \text{FOC}$$

$$g(x,y)=a \; \} \; C$$

- "vanligvis": ingen tillatte pkt m/ degenerert bibetingelse
- degenerert bibetingelse = ikke entydig tegnet

FOC: $\left\{\begin{matrix} L'_x=0 \\ L'_y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \nabla f = \lambda\cdot\nabla g$ $\qquad \left\{\begin{matrix} g'_x=0 \\ g'_y=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oppg 3c fra Oppgaveark 46

max/min $f(x,y) = y$ når $y(x^2+y^2) = 2\cdot(x^2-y^2)$

$$\underbrace{y(x^2+y^2) - 2(x^2-y^2)}_{g(x,y)} = \underbrace{0}_{a=0}$$

Kandidater for max/min:

(a) $\mathcal{L} = y - \lambda\cdot\left(y(x^2+y^2) - 2(x^2-y^2)\right)$

$= y - \lambda(x^2y + y^3 - 2x^2 + 2y^2)$

ordinære kandidatpkt

$$\text{FOC}\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -\lambda(2xy - 4x) = 0 & (1) \\ \mathcal{L}'_y = 1 - \lambda(x^2 + 3y^2 + 4y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{C} \quad y(x^2+y^2) - 2(x^2-y^2) = 0 \quad (3)$$

(1) $-\lambda\cdot 2x\cdot(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\lambda = 0 \vee x = 0 \vee y = 2$

$\lambda = 0$ $\vee$ $x = 0$ $\vee$ $y = 2$

$\lambda = 0$:

(2) $1 - 0 = 0$

ingen kand.

$x = 0$:

(3) $y^3 + 2y^2 = 0$

$y^2(y+2) = 0$

$y = 0 \vee y = -2$

$y = 2$:

(3) $2(\cancel{x^2}+4) - 2(\cancel{x^2}-4) = 0$

$8 + 8 = 0$

ingen kand.

$x = 0, y = 0$:

$1 - \lambda\cdot 0 = 0$

ingen kand.

$x = 0, y = -2$:

$1 - \lambda\cdot(12-8) = 0$

$1 - 4\lambda = 0$

$\lambda = 1/4$

$\Downarrow$

$(x,y;\lambda) = (0,-2;1/4)$

$f = -2$

(b) Unntakspkt: Tillatte pkt m/ degenerert bibetingelse

$g(x,y)=a$: $\quad y(x^2+y^2)-2(x^2-y^2)=0$

$$\underbrace{x^2y+y^3-2x^2+2y^2}_{g}=0$$

$g'_x=0$, $g'_y=0$, $g(x,y)=a$:

$g'_x = 2xy-4x=0$ $\quad$ (1) $2x(y-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \lor y=2$

$g'_y = x^2+3y^2+4y=0$ (2)

$x^2y+y^3-2x^2+2y^2=0$ (3)

$x=0$

(3) $y^3+2y^2=0$

$y^2(y+2)=0$

$y=0 \lor y=-2$

$x=0,\ y=0$: (2) $0=0$ ok $\Rightarrow (0,0)$

$x=0,\ y=-2$: (2) $0+12-8=0$, $4=0$ ingen løsn.

$y=2$

(3) $\cancel{2x^2}+8-\cancel{2x^2}+8=0$

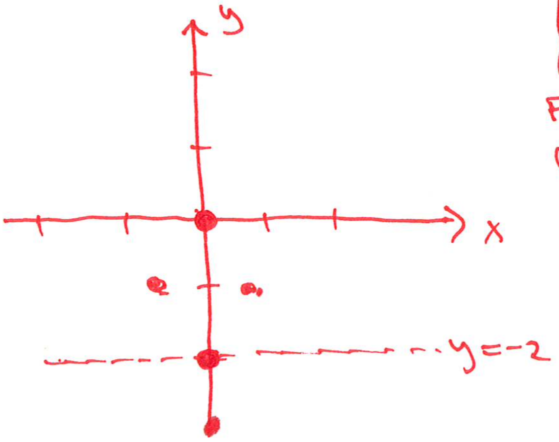
$16=0$

ingen løsn.

Konklusjon (så langt):

Kand. for max/min $\begin{cases} (0,-2;\ 1/4) & f=-2 \\ (0,0) & f=0 \end{cases}$

$$\boxed{\text{max/min } f(x,y)=y \text{ når } y(x^2+y^2)-2(x^2-y^2)=0}$$



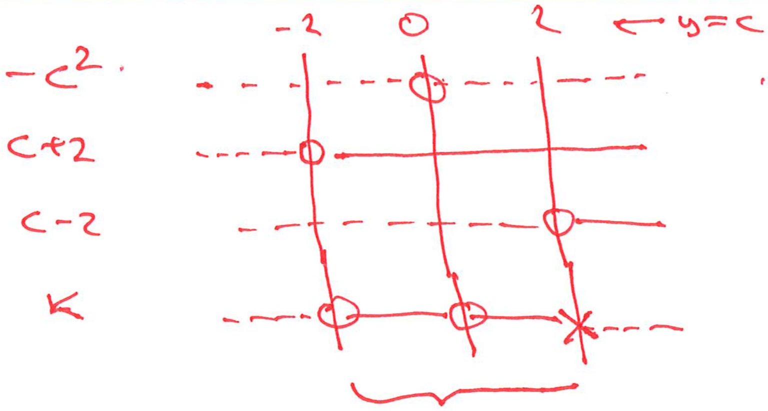
Fo Hvilke verdier $f(x,y)=y=c$ har likn. $g(x,c)=0$ løsn. for x?

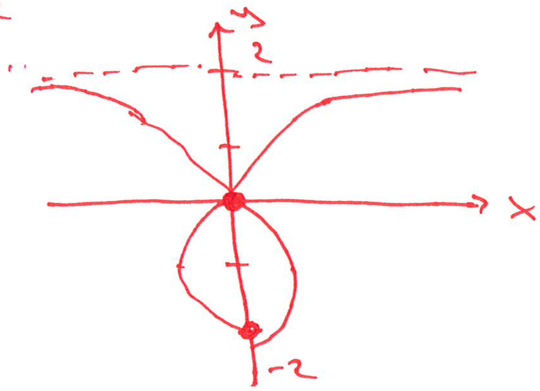
$y=c$: $\quad c\cdot(x^2+c^2)-2(x^2-c^2)=0$

$cx^2-2x^2=-c^3-2c^2$

$(c-2)x^2=-c^3-2c^2$

$$x^2=\frac{-c^3-2c^2}{c-2}=\frac{-c^2(c+2)}{c-2}=k$$





$V_f = [-2, 2)$

$x^2 = k$

$x = \pm\sqrt{k}$

$f_{min} = \underline{\underline{-2}}$ i $(0,-2)$

ingen max.

② Tolkning av Lagrange multiplikatoren λ

Eks: ~~max~~/min $\underbrace{4x^2+9y^2}_{f}$ når $\underbrace{2x+3y}_{g(x,y)} = \underbrace{6}_{a=6}$ (Ib, oppg.ark 46)

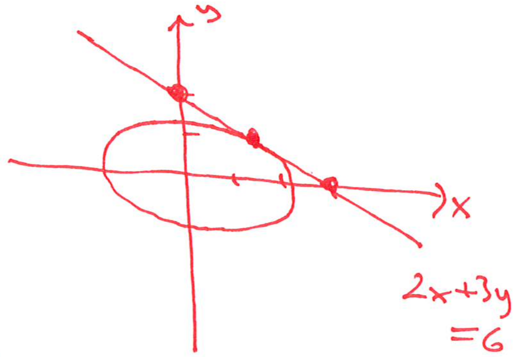
$L = 4x^2 + 9y^2 - \lambda(2x+3y-6)$

$L'_x = 8x - \lambda \cdot 2 = 0$ $\quad \lambda = \frac{8x}{2} = 4x$ ①

$L'_y = 18y - \lambda \cdot 3 = 0$ $\quad \lambda = \frac{18y}{3} = 6y$ ②

$2x + 3y = 6$ ③ $\qquad 4x = 6y$

$x = 6y/4 = \underline{3y/2}$



③ $\cancel{2}(3y/\cancel{2}) + 3y = 6$

$6y = 6$

$\underline{y = 1}$

$\underline{x = 3/2}$

$\underline{\lambda = 6}$

Kand. pkt:

$(3/2, 1; 6)$ $f = 18$

$\Rightarrow f_{min} = \underline{\underline{18}}$

Tolkning av $\lambda = 6$:

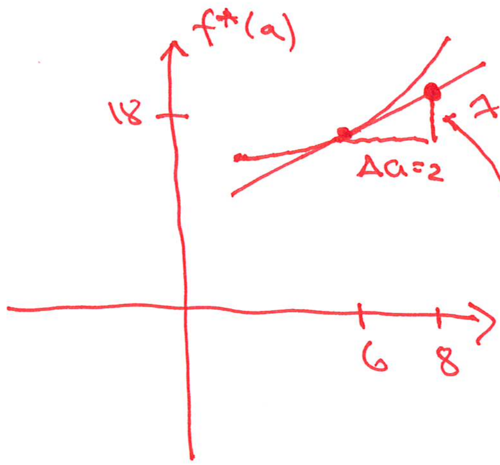
$f_{min}(a=8) \cong \underset{18}{f_{min}(a=6)} + \underset{2}{\Delta a} \cdot \underset{6}{\lambda} = \underline{\underline{30}}$

Tolkning av λ: marginal endring i max/min-verdi når vi endrer a

Lagrange-problemet med parameter:

min $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ når $2x + 3y = a$

$f^*(a)$ = minimumsverdien til Lagrange-problemet som er funksjon av a



λ = stign.tallet til tangent til fn. $f^*(a) = 6$

$\underline{a=6}$: $x = 3/2$, $y = 1$, $\lambda = 6$, $f = 18$ $f^*(6) = 18$

$\Delta a \cdot \lambda = 2 \cdot 6 = 12$

$$f^*(a) \simeq f^*(6) + \underbrace{\Delta a}_{= a-6} \cdot \underbrace{6}_{= \lambda}$$

tilnærmingsverdi ved å følge tangenten

Formelark

Finansmatematikk

Geometriske rekker.
En endelig geometrisk rekke har sum

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1}$$

og en uendelige geometrisk rekke har sum

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-k} \quad \text{når } |k| < 1$$

Nåverdier.
Nåverdien K_0 til en innbetaling K_n er

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n} \quad \text{og} \quad K_0 = \frac{K_n}{e^{rn}}$$

ved diskret og kontinuerlig diskonteringsrente.

Integrasjon

Integrasjonsmetoder.

a) Delvis integrasjon:

$$\int u'v \, \mathrm{d}x = uv - \int uv' \, \mathrm{d}x$$

b) Substitusjon:

$$\int f(u)u' \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u$$

c) Delbrøksoppspaltning:

$$\int \frac{px+q}{(x-a)(x-b)} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \mathrm{d}x$$

Areal.
Arealet til området begrenset av $a \leq x \leq b$ og $f(x) \leq y \leq g(x)$ er

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x$$

Lineær algebra

Cramers regel.
Et lineært system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der $|A| \neq 0$ har en entydig løsning gitt ved

$$x_1 = \frac{|A_1(\mathbf{b})|}{|A|} \quad x_2 = \frac{|A_2(\mathbf{b})|}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{|A_n(\mathbf{b})|}{|A|}$$

der $A_i(\mathbf{b})$ framkommer ved å bytte ut kolonne i fra matrisen A med $\mathbf{b}$.

Funksjoner i to variabler

Andrederivert-testen.
Et stasjonært punkt (x^*, y^*) for funksjonen $f(x,y)$ er et

a) lokalt minimum når $A > 0$ og $AC - B^2 > 0$
b) lokalt maksimum når $A < 0$ og $AC - B^2 > 0$
c) sadelpunkt når $AC - B^2 < 0$

der $H(f)(x^*, y^*) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$.

Nivåkurver.
Nivåkurven $f(x,y) = c$ har derivert $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ gitt ved

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Lagranges multiplikatormetode.
Lagrange-betingelsene for problemet

$$\max / \min f(x,y) \text{ når } g(x,y) = a$$

er gitt ved

$$\mathcal{L}'_x = 0, \ \mathcal{L}'_y = 0, \ g(x,y) = a$$

Et tillatt punkt har degenerert bibetingelse hvis

$$g'_x = 0, \ g'_y = 0$$