Plan

1 Oppgaveregning
2 Oppsummering av Kap 7: Funksjoner i to variabler

Forelesning 11/05 kl 10 A1-030
Eksamen 24/05 kl 9-14 (se forside)
Kontor B3y-085 ca kl 10-18 de fleste dager

Oppsummering Kap 7: Funksjoner i to variabler

A Optimering uten bibetingelser max/min $f(x,y)$

- Finn kandidater for max/min:
  Stasjonære pkt for f + unntakspkt
  $(f'_x = f'_y = 0)$ (randpkt / pkt der f'_x / f'_y ikke er defn.)
- Klassifisere som lokal max / lokal min / sadelpkt

Andrederivert-testen:
(x^*, y^*) stasjonært pkt : $H(f)(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ $A = f''_{xx}(x^*,y^*)$ etc.

Regn ut $d = \det H(f)(x^*,y^*) = AC - B^2$
$t = \operatorname{tr} H(f)(x^*,y^*) = A + C$

$d>0, t>0$:	(x^*,y^*)	lokalt min
$d>0, t<0$:	"	lokalt max
$d<0$:	"	sadelpkt

Unntak: unntakspkt + stasjonære pkt med $d = 0$

– Undersøke om lokal maks er maks / lokale min er min

Eks: $f(x,y) = x^2y^2 + xy + x - y$

(5c) Stasjonære pkt

$f'_x = 2xy^2 + y + 1 = 0$

$f'_y = x^2 \cdot 2y + x - 1 = 0$

(1) $\frac{2x \cdot y^2}{2y^2} = \frac{-y-1}{2y^2}$

$x = \frac{-y-1}{2y^2}$

$y=0$: $1=0$ ingen stasj. pkt.

(2) $\left(\frac{-y-1}{2y^2}\right)^2 \cdot 2y + \left(\frac{-y-1}{2y^2}\right) - 1 = 0$

$2y^3 \cdot \Big|$ $\frac{(-y-1)^2}{2\cancel{4}y^{\cancel{4}3}} \cdot \cancel{2y} + \frac{-y-1}{2y^2} - 1 = 0$

$(-y-1)^2 + y(-y-1) - 2y^3 = 0$

$\cancel{y^2} + 2y + 1 - \cancel{y^2} - y - 2y^3 = 0$

$-2y^3 + y + 1 = 0 \leftarrow y=1$ er løsn.

$(y-1)(-2y^2-2y-1) = 0$

$$\begin{array}{l} -2y^3 + y + 1 : y - 1 = -2y^2 - 2y - 1 \\ -(-2y^3 + 2y^2) \\ \hline -2y^2 + y + 1 \\ -(-2y^2 + 2y) \\ \hline -y + 1 \\ -y + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\underline{y=1}$ eller $-2y^2 - 2y - 1 = 0$

$\underline{x=-1}$ $y = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{-4}$

ingen løsn

Stasjonære pkt:

$(x,y) = \underline{\underline{(-1,1)}}$

Klassifikasjon: $H(f) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy+1 \\ 4xy+1 & 2x^2 \end{pmatrix}$

$(x,y)=(-1,1)$: $H(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\det = 4-9 = -5 < 0$, $\operatorname{tr} = 2+2 = 4$

$\Rightarrow$ $(-1,1)$ sadelpkt

ingen max/min

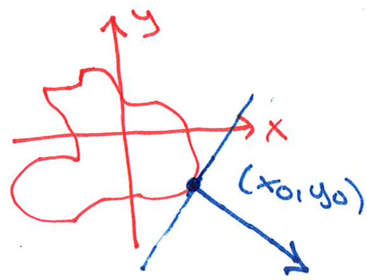
(B) Nivåkurver $f(x,y)=c$

Vi ka tenke oss nivåkurvene som kurver i (x,y)-planet.

(i) Tangent i $f(x,y)=c$ i (x_0,y_0)

$y-y_0 = a\cdot(x-x_0)$

der $a = -\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$



$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) \\ f'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

(ii) Gradienten: $\nabla f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix}$

vektor som står normalt på tangenten og som peker i den retningen hvor f vokser raskest

(c) Optimering med bibetingelser

max/min $f(x,y)$ når ...

bibetingelser = likninger eller ulikheter

D = mengden av alle pkt som oppfyller alle bibetingelsene

(mengden av tillatte pkt)

Kan tenke på D som en mengde i xy-planet

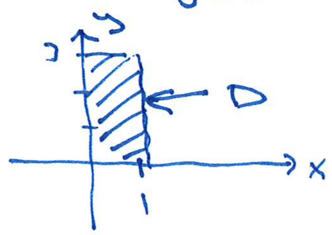
(a) Ekstremverdisetningen

Hvis f er kontinuerlig og D er kompakt (lukket og begrenset), så har f et maks og min på D.

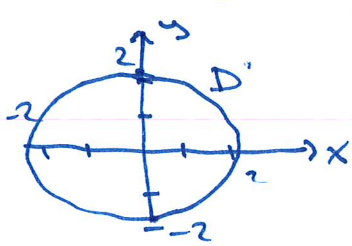
(b) Randpkt og indre punkt for D

Eks:

(a) $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$



(b) $x^2+y^2=4$



i) Optimering på en firkant

$$\boxed{D: \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{array}}$$

Kandidat for max/min:

* Stasjonære pkt for f som er indre pkt (dvs $a<x<b$, $c<y<d$)
* alle randpkt for D
* maks/min: kand. pkt med størst/minst f-verdi

ii) Lagrange-problem: max/min $f(x,y)$ når $g(x,y)=a$

Kandidat for max/min:

i) Lagranges multiplikatormetode

$$L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda\cdot(g(x,y)-a)$$

Lagrange-betingelsene

$$\boxed{\begin{array}{l} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ g(x,y)=a \end{array}} \Rightarrow (x,y;\lambda) \text{ ord. kand. pkt.}$$

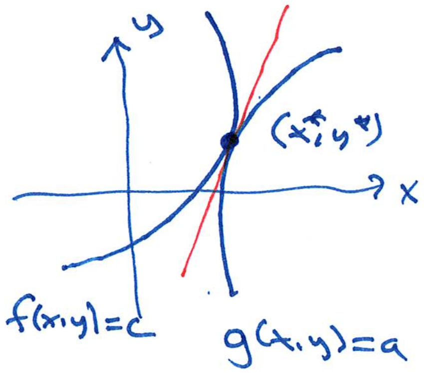
ii) Unntakspkt:

tillatte pkt med degenerert bibetingelse

$$\boxed{\begin{aligned} g'_x &= 0 \\ g'_y &= 0 \\ g(x,y) &= a \end{aligned}} \Rightarrow (x,y) \text{ unntakspkt}$$

Merk:

a) $\boxed{\text{Et pkt } (x^*,y^*;\lambda^*) \text{ oppfyller Lagrange betingelsen FOC+C med } f(x^*,y^*)=c}$ $\Leftrightarrow$ Nivåkurven $f(x,y)=c$ og bibetingelsen $g(x,y)=a$ har samme tangent i (x^*,y^*).



b) $\boxed{\text{Et pkt } (x^*,y^*) \text{ med degenerert bibetingelse (som er tillatt)}}$

$\Updownarrow$

Kurven $g(x,y)=a$ har ikke entydig tangent i (x^*,y^*).

c) Tolkning av λ:

$(x^*,y^*;\lambda^*)$ er max/min $\Rightarrow$ $\lambda^* =$ marginal endring i max/min-verdi når vi endrer a i bibetingelsen $g(x,y)=a$.

Eivind Eriksen, Kontor B3y-085, eivind.eriksen@bi.no
http://www.dr-eriksen.no/teaching/MET1180/