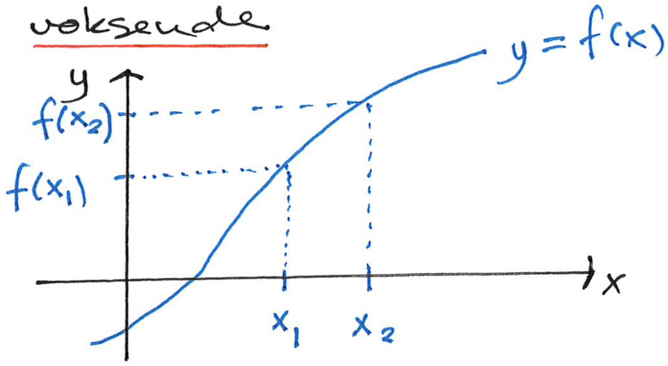
MET 1180, 12. forelesning, 5. okt. 2023, Runar Ile

Plan
1. Voksende og avtagende funksjoner
2. Sirkler og ellipser
3. Polynomfunksjoner

1. Voksende og avtagende funksjoner

Definisjon En funksjon $f(x)$ er voksende hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \leq f(x_2)$



Eks $f(x) = 2x + 5$ er voksende for alle x

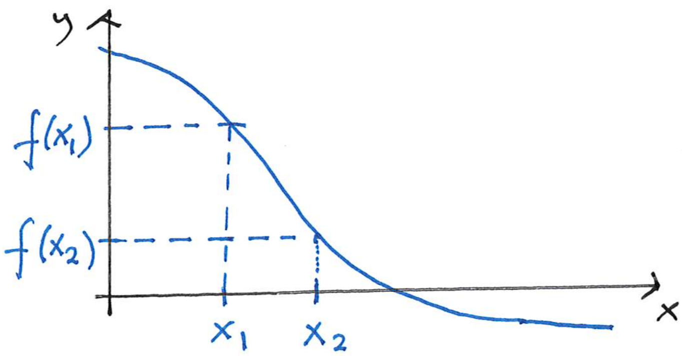
fordi: Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot 2$

$$2x_1 < 2x_2 \quad | +5$$

$$f(x_1) = 2x_1 + 5 < 2x_2 + 5 = f(x_2)$$

Altså er $f(x)$ (strengt) voksende.

Definisjon En funksjon $f(x)$ er avtagende hvis for alle $x_1 < x_2$ så gjelder $f(x_1) \geq f(x_2)$



Oppg Vis at $f(x) = -2x + 5$ er (strengt) avtagende.

Løsning Anta $x_1 < x_2 \quad | \cdot (-2)$

$$-2x_1 > -2x_2 \quad | +5$$

$$f(x_1) = -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 = f(x_2)$$

OPPG Vi har konstantfunksjonen $f(x) = 5$. Avgjør om $f(x)$ er voksende, avtagende eller ingen av delene.

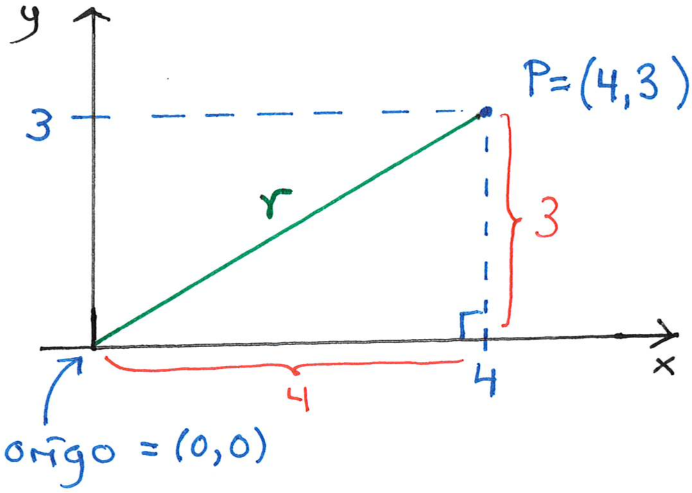
Løsning

Voksende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \leq 5 = f(x_2)$.

Avtagende: Hvis $x_1 < x_2$ så vil $f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$.

Men $f(x)$ er ikke strengt voksende og ikke strengt avtagende

2. Sirkler og ellipser



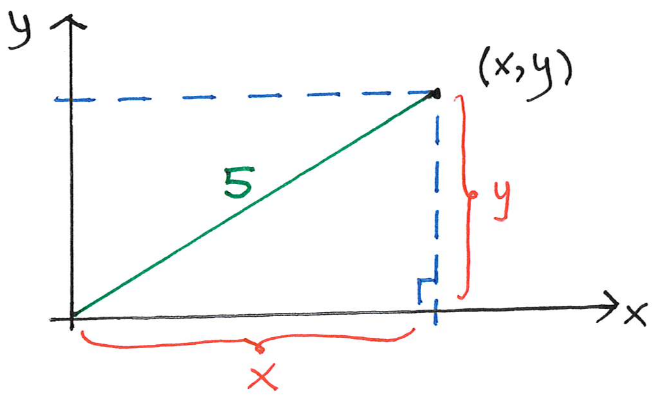
Pytagoras:

$$r^2 = 4^2 + 3^2 \quad (r \geq 0)$$

$$r^2 = 16 + 9 = 25$$

$$r = \sqrt{25} = 5$$

Anta punktet (x, y) ligger 5 fra origo



Pytagoras:

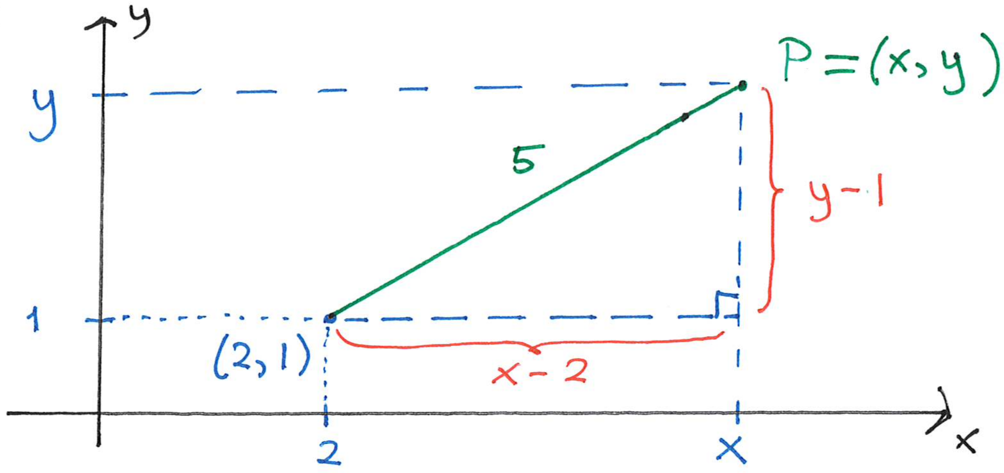
$$25 = 5^2 = x^2 + y^2$$

- én likning med to ukjente

- uendelig mange løsninger

Løsningene er alle punkter (x, y) på sirkelen med radius 5 og sentrum $(0, 0)$.

Eks Hva er likningen til punktene på en sirkel med radius 5 og sentrum $(2,1)$?



Pytagoras: $5^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$$25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

dvs $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$

Oppg Bestem radius og sentrum til sirkelen gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = -9$$

Løsning $\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} + \underbrace{(y+3)^2}_{y^2+6y+9} = -9+1+9 = 1$

sentrum: $\underline{\underline{(1,-3)}}$, radius: $\sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$

Ellipser

Eks $4x^2 + 9y^2 = 36$

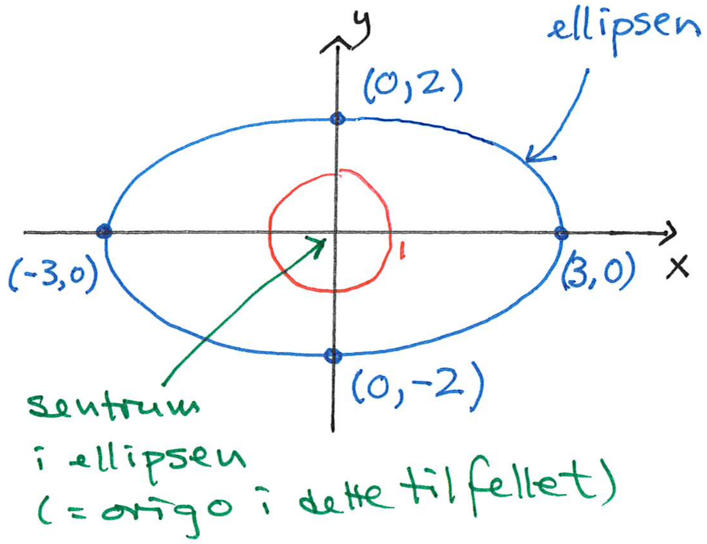
x	3	-3	0	0
y	0	0	2	-2

Deler begge sider av likningen med 36

$$\frac{4}{36}x^2 + \frac{9}{36}y^2 = 1$$

$\frac{1}{9}$ " $\quad$ $= \frac{1}{4}$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$



Dette minner om en sirkellikning, men

x-aksen er strukket med faktor 3

y-aksen ——— " ——— 2

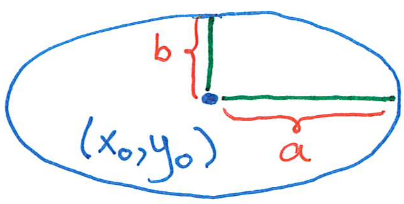
Generelt Enhver ellipse er løsningene på en likning på formen

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Her er (x_0, y_0) sentrum i ellipsen, og a og b er horisontal og vertikal halvakse

Eks. over: $(x_0, y_0) = (0,0)$

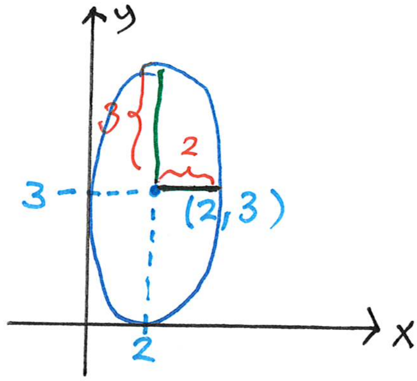
$a = 3$, $b = 2$



<u>Eks</u> $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Sentrum : $(2, 3)$

Halvakser : $a = \sqrt{4} = 2$ og $b = \sqrt{9} = 3$



---

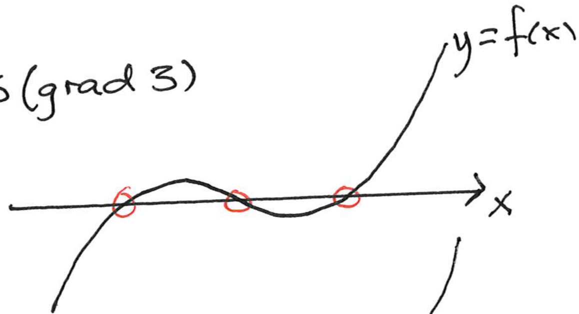
3. Polynomfunksjoner

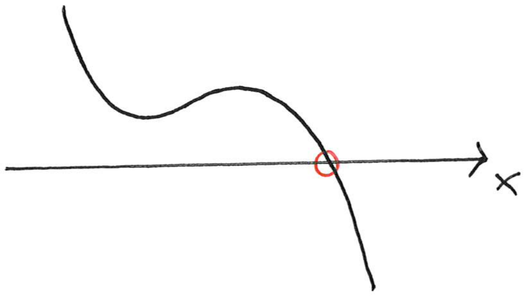
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

er en polynomfunksjon av grad n, skriver $\text{grad}(f) = n$

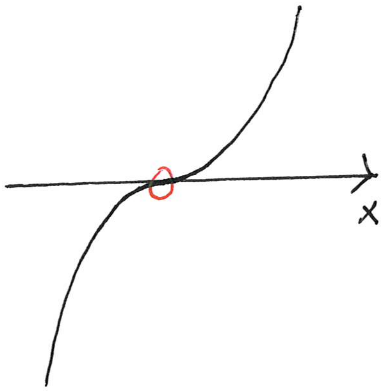
- $f(x)$ har maksimalt n røtter (nullpunkter)
- Hvis graden er et oddetall har $f(x)$ minst én rot.
- Hvis $h(x)$ er en polynomfunksjon med m røtter er graden $(h) \geq m$.

<u>Eks</u> (grad 3)

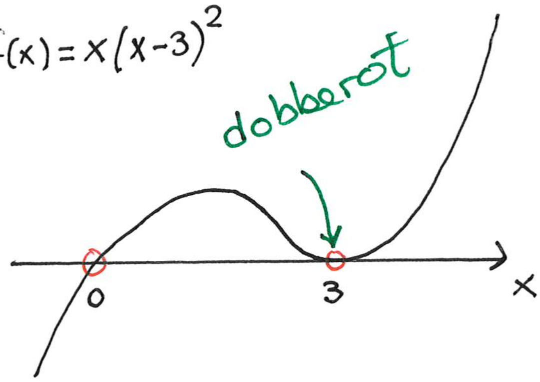




$f(x) = x^3$

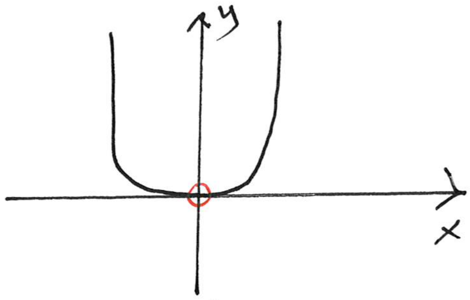


$f(x) = x(x-3)^2$



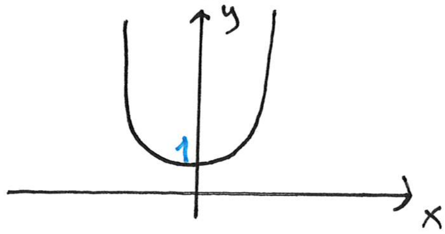
Eks (grad 4)

$f(x) = x^4$



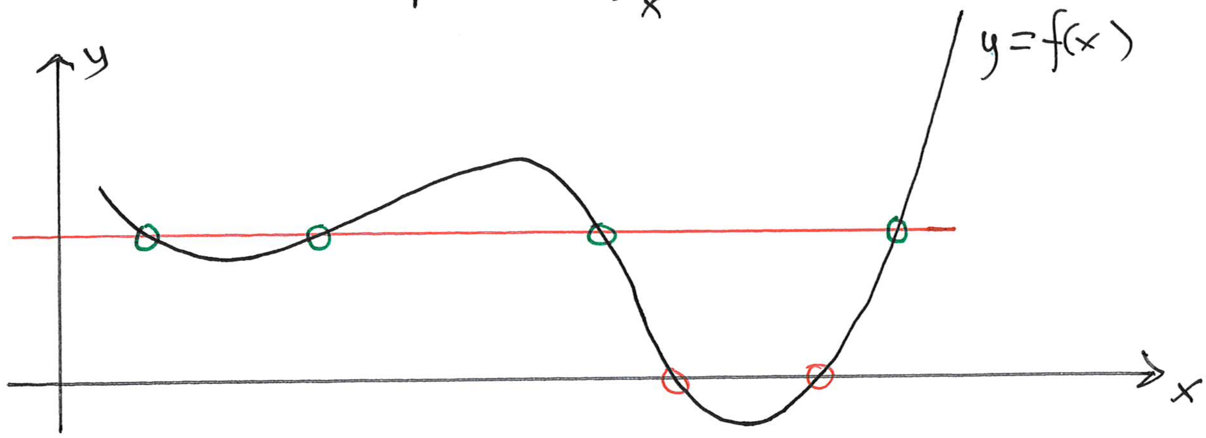
– én rot

$f(x) = x^4 + 1$



– ingen røtter

Eks



Likningen $f(x) = 20$ har 4 løsninger, dvs at $f(x) - 20 = 0$ ——— " ———, dvs 4 røtter

dvs at graden til $f(x) - 20$ er minst 4. Da er graden til $f(x)$ også minst 4 (samme grad som $f(x) - 20$)