MET 1180, 15. forelesning, 17. okt. 2023, Runar Ile

Plan: Repetisjon

1. Omvendte funksjoner
2. Logaritme- og eksponensialfunksjoner
3. Asymptoter

1. Omvendte funksjoner

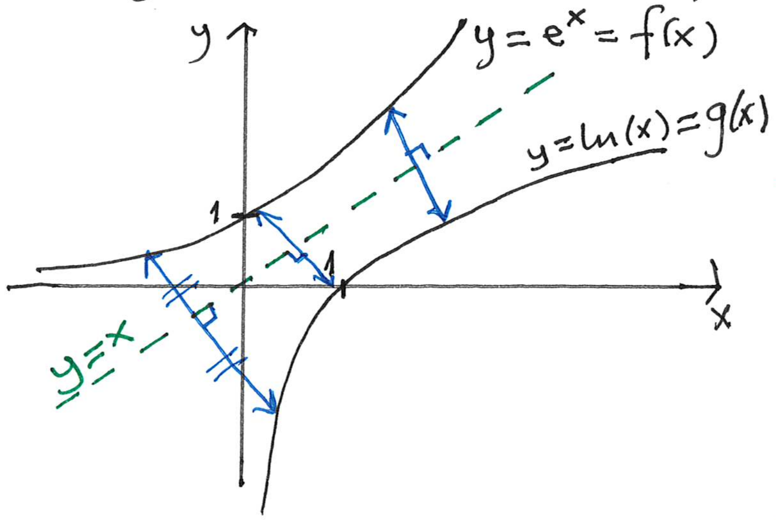
Definisjon:

$f(g(x)) = x$ for alle x i D_g

$g(f(x)) = x$ for alle x i D_f

*) Grafene er symmetriske om linjen $y = x$

*) For at $f(x)$ skal ha en omvendt funksjon må $f(x)$ enten være strengt voksende eller strengt avtagende.



*) $D_g = V_f$ og $V_g = D_f$

Hvordan finner vi $g(x)$ og D_g i praksis?

Oppg 5d $f(x) = 20 + \frac{1}{x-3}$, $D_f = \langle 3, \rightarrow \rangle$

1. Løser likningen $y = f(x)$ for x.

dvs
$$y = 20 + \frac{1}{x-3} \quad | \cdot (x-3)$$
$$y(x-3) = 20(x-3) + 1$$
$$yx - 3y = 20x - 60 + 1 = 20x - 59$$
$$yx - 20x = 3y - 59$$

$$(y-20)x = 3y-59 \quad \Big| : (y-20)$$

$$x = \frac{3y-59}{y-20}$$

$$x \overset{\text{poly. div.}}{=} 3 + \frac{1}{y-20}$$

(2) Bytter variablene ($y \leftrightarrow x$)

$$\underline{\underline{y = g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}}}$$

(3) Setter $D_g = V_f$ og finner V_f:

V_f = mengden av mulige y-verdier for $f(x)$ når x varierer i D_f.

Merk at $f(x) \xrightarrow[x \to 3^+]{} +\infty$ og

$f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 20^+$ så $D_g = V_f = \underline{\underline{\langle 20, \rightarrow \rangle}}$

alt.: $x > 20$

2. Logaritme- og eksponensialfunksjoner

<u>Oppg 6</u> Har $\ln(2) = 0,6931$, $\ln(3) = 1,0986$ og $\ln(5) = 1,6094$. Da har vi (uten ln på kalk.)

d) $\ln\left(\frac{1000000}{27}\right) = \ln(10^6) - \ln(3^3)$

$= 6\ln(10) - 3\ln(3)$

$= 6(\ln(2) + \ln(5)) - 3\ln(3)$

$= 6(0,6931 + 1,6094) - 3 \cdot 1,0986 = \underline{\underline{10.5192}}$

f) $\ln\left(\sqrt[10]{6}\right) = \ln\left(6^{\frac{1}{10}}\right) = \frac{1}{10}\ln(6) = \frac{\ln(2)+\ln(3)}{10}$

$= \underline{\underline{0{,}1792}}$

$f(x) = a^x$ med D_f = alle tall på tallinjen

Start: 15.00

$a > 0$, $a \neq 1$

$g(x) = \log_a(x)$, $D_g = \langle 0, \rightarrow\rangle = V_f$

Eks Hvor lang tid tar det å doble innskuddet på en konto med 3% rente?

Løsning $f(x) = 1{,}03^x$ er balansen etter x år hvis innskuddet var 1. Vi må løse likningen $f(x) = 2$ dvs $1{,}03^x \overset{(*)}{=} 2$

Setter inn i $g(x)$: $x = g(f(x)) = g(2)$ dvs $\log_{1{,}03}(1{,}03^x) = \log_{1{,}03}(2)$

dvs $x = \log_{1{,}03}(2)$

Men, kan ikke regne dette ut på BI-kalk. direkte. I stedet setter vi VS og HS av (*) inn i $\ln(x) = \log_e(x)$. Får

$$\ln(1{,}03^x) = \ln(2)$$

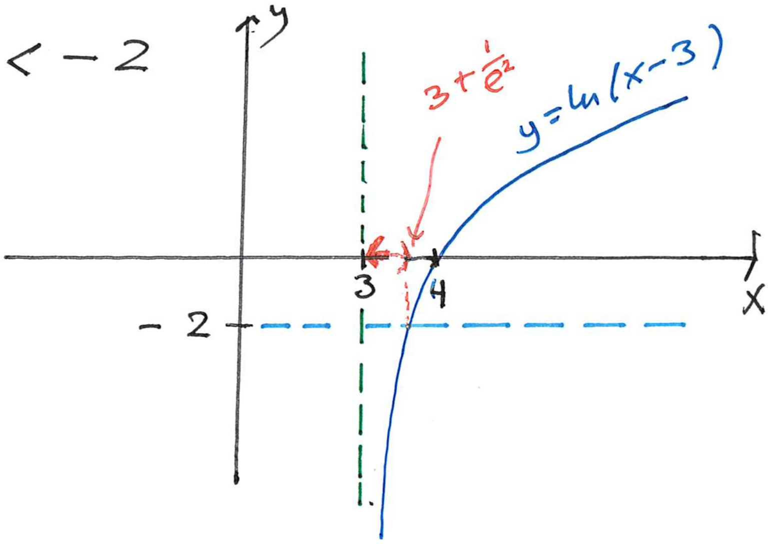
$$x \cdot \ln(1{,}03) = \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)} \approx \underline{\underline{23{,}45}}$$

Dvs $\log_{1{,}03}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}03)}$ Mønster $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Oppg 8c $\quad \ln(x-3) < -2$

Fordi e^x er strengt voksende kan vi sette VS og HS inn i e^x og få en ekvivalent ulikhet



$$e^{\ln(x-3)} < e^{-2}$$

$$x - 3 < e^{-2}$$

$$x < 3 + e^{-2}$$

Men den opprinnelig ulikheten er bare definert for $x > 3$, så løsningsmengden er $\langle 3, 3 + e^{-2} \rangle$

Oppg 8e $\quad \dfrac{3e^x}{e^x + 1} < 5$

Men her er det enklere å multiplisere BS med $e^x + 1$ som er et positivt tall for alle x.

$$3e^x < 5(e^x + 1) = 5e^x + 5$$

$$-5 < 2e^x \quad | : 2$$

$$-\frac{5}{2} < e^x$$ og dette er sant for alle x.

Kan løses ved å bruke substitusjonen $u = e^x$ som gir

$$\frac{3u}{u+1} < 5$$

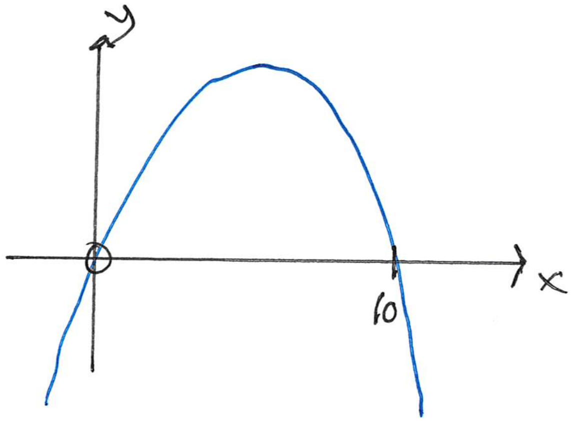
$$\frac{3u}{u+1} - 5 < 0$$

- felles brøk
- fortegnsskjema
- bruke $u = e^x$

3. Asymptoter

Oppg 9 Bestem asymptotene til $f(x)$.

b) $f(x) = e^{x(10-x)} + 50$



Merk at $x(10-x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$

Altså $e^{x(10-x)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0^+$

Så $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 50^+$ og $\underline{\underline{y = 50}}$ er en horisontal asymptote (både $x \to \infty$ og $x \to -\infty$)

d) $f(x) = \ln(10-x)$ er bare definert for $x < 10$.

Hvis $x \to 10^-$ vil $10 - x \to 0^+$ og

$f(x) = \ln(10-x) \xrightarrow[x \to 10^-]{} -\infty$

Så $\underline{\underline{x = 10}}$ er en vertikal asymptote for $f(x)$.

f) $f(x) = \ln(\overbrace{120x + 10}^{\text{pos. i } D_f}) - \ln(\overbrace{20x - 30}^{\text{pos. i } D_f})$ $\quad D_f = \langle \frac{3}{2}, \to \rangle$

$= \ln\left(\dfrac{120x + 10}{20x - 30}\right)$

Merk at $\dfrac{120x+10}{20x-30} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{120}{20} = 6$ så

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln(6)$ og $\underline{\underline{y = \ln(6)}}$ er en horisontal asymptote.

Merk også $\dfrac{120x+10}{20x-30} \xrightarrow[x \to \frac{3}{2}^+]{} +\infty$

Altså $f(x) \xrightarrow[x \to \frac{3}{2}^+]{} +\infty$ så $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$ er en vertikal asymptote.