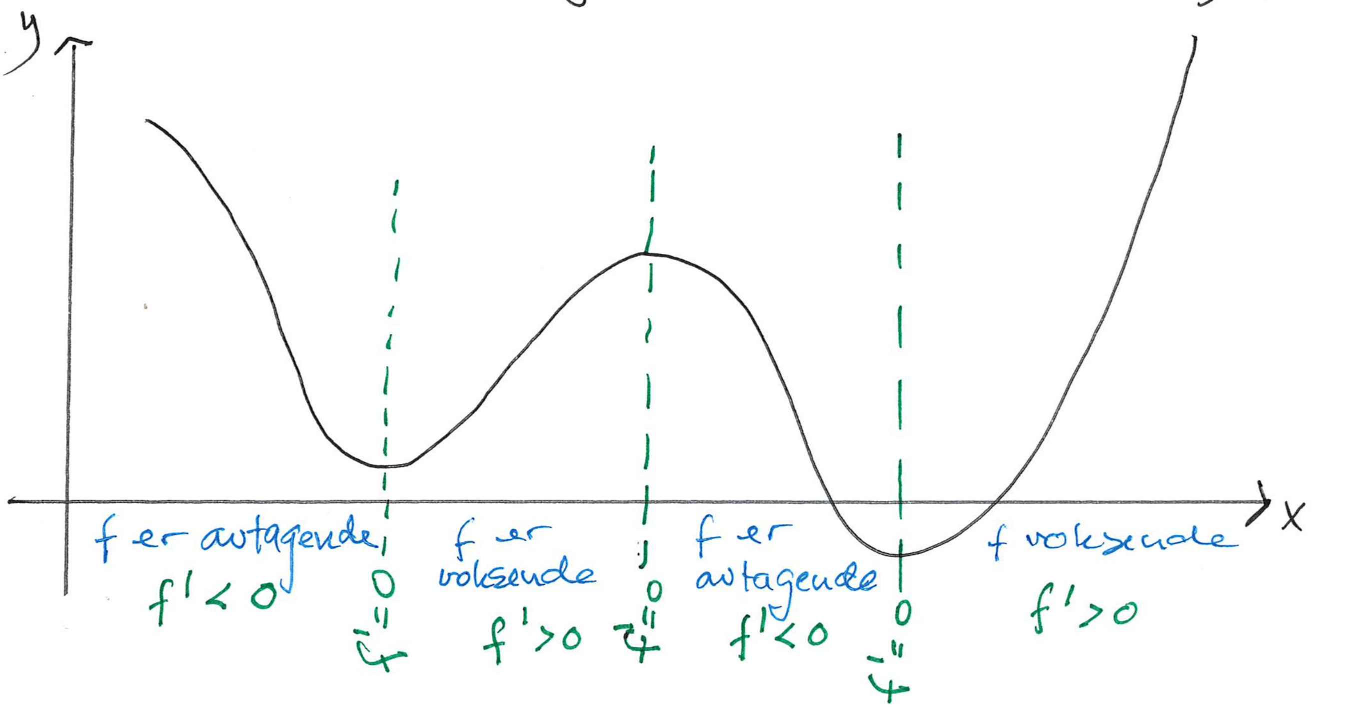
MET 1180, 18. forelesning, 26. nov. 2023, Runar Ile

Plan: 1. Lokale maks/min og stasjonære punkter
2. Globale maks/min
3. Middelverdisetningen

1. Lokale maks./min. og stasjonære punkter

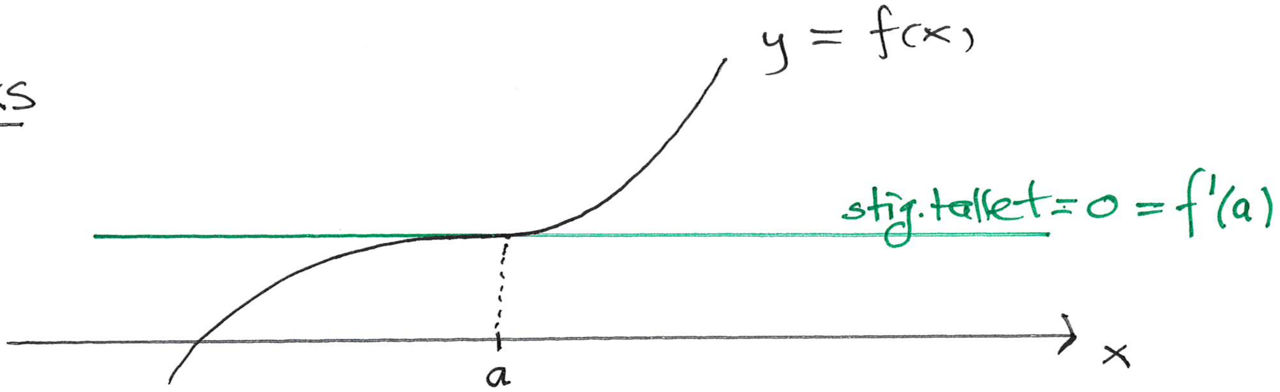


Hvis $f'(x)$ er pos., så er $f(x)$ voksende
Hvis $f'(x)$ er neg., —"— avtagende

Hvis $x = a$ er et lokalt minimumspunkt, vil
$f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $-$ til $+$
Hvis $x = a$ er et lokalt maksimumspunkt, vil
$f'(a) = 0$ og $f'(x)$ skifter fortegn fra $+$ til $-$

Viktig konklusjon: Fortegnsskjemaet til $f'(x)$ bestemmer hvor $f(x)$ vokser og avtar og hvor de lokale maks. og minimums-punktene er.

Eks



Her er $x = a$ hverken et lokalt maks. el. min. punkt. Kaller $x = a$ et terrassepunkt. (den den deriverte $= 0$, men skifter ikke fortegn)

> Definisjon. Hvis $f'(a) = 0$ er $x = a$ et stasjonært punkt.

Eks $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Stasjonære punkter?

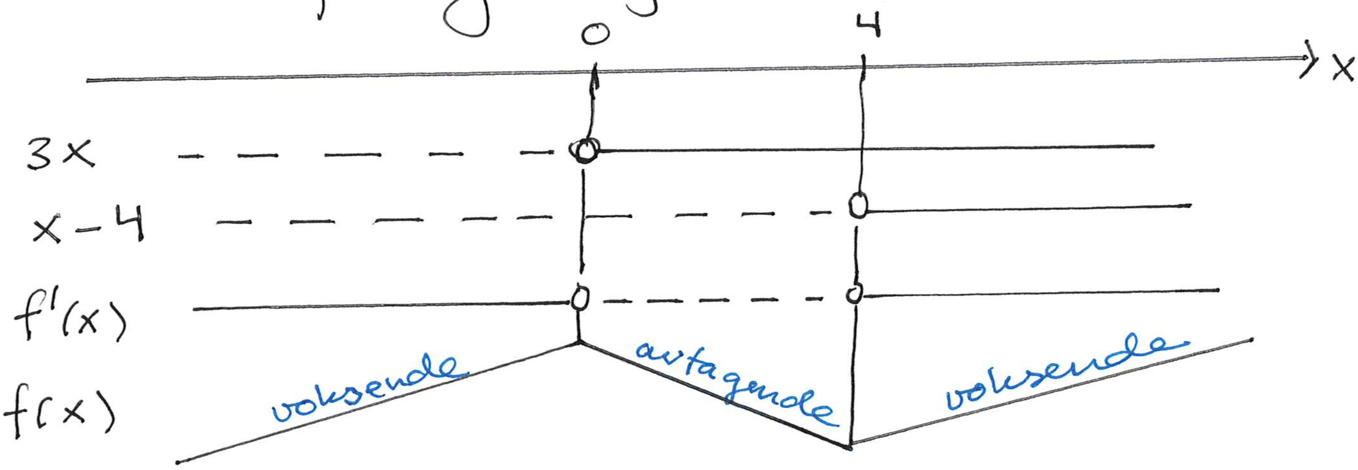
– Løser likningen $f'(x) = 0$ for x

Dvs $f'(x) \overset{\text{utregn.}}{=} 3x^2 - 12x \overset{\text{likn.}}{=} 0$

dvs $3x(x-4) = 0$

Så $f'(x) = 0$ har løsninger $\underline{\underline{x = 0}}$, $\underline{\underline{x = 4}}$

Hvor er $f(x)$ voksende/avtagende?
Bruker fortegnsskjema for $f'(x)$



$f(x)$ er strengt voksende for $x \leq 0$ (så $x \in \langle \leftarrow, 0]$)

$f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leq x \leq 4$ (så $x \in [0, 4]$)

$f(x)$ er strengt voksende for $x \geq 4$ (så $x \in [4, \rightarrow\rangle$)

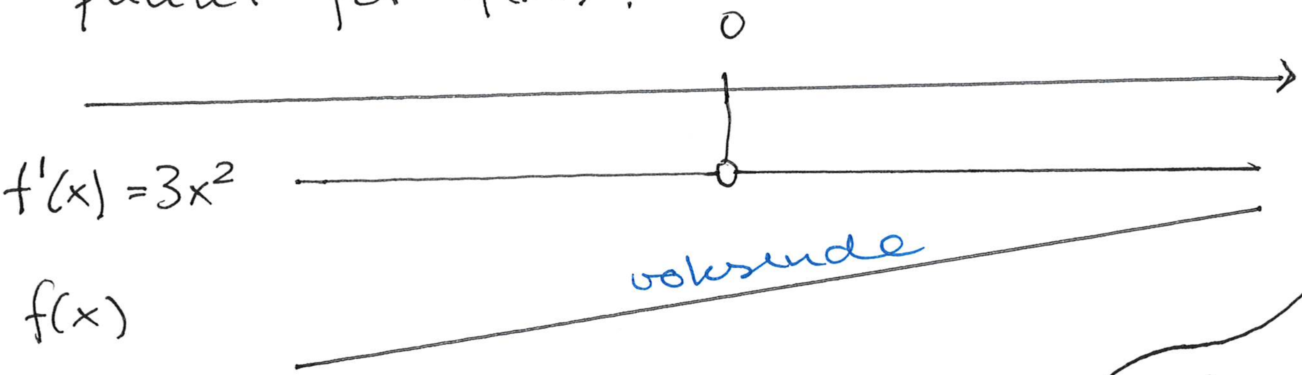
Da er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt.

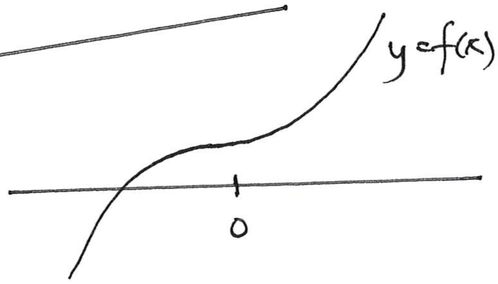
og $x = 4$ —"— minimumspunkt.

Start: 9.00

Eks $f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2$, så $x = 0$ er eneste stasjonære punkt for $f(x)$.





Konkl $f(x)$ er strengt voksende.
(for alle tall på tallinjen, $x \in \mathbb{R}$)
$x \in \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$

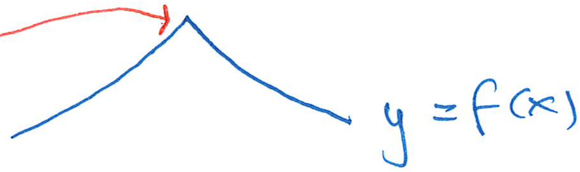
2. Globale maks/min.

Ekstremverdisetningen Hvis $f(x)$ er kontinuerlig (sammenhengende graf) på intervallet $D_f = [a, b]$ så har $f(x)$ et maksimum („globalt") og et minimum („globalt")

Tre mulige typer maks/min. punkter (globale)

(*) stasjonære punkter ($f'(x) = 0$)

(*) knekkpunkter (hvor $f'(x)$ ikke er definert)



(*) endepunktene

$x = a$, $x = b$.

Eks $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ med $D_f = [-1, 7]$.

Finn maks./min. til $f(x)$.

(*) Stasjonære punkter: $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0$

gir $\underline{x = 0}$, $\underline{x = 4}$

(*) Knekkpunkter: ingen fordi $f'(x)$ er definert for alle x

(*) endepunktene : $\underline{x = -1}$, $\underline{x = 7}$

Disse fire punktene (x-verdiene) er <u>kandidatpunkter</u> for maks/min.

Regner funksjonsverdiene for kandidatpunktene:

$f(-1) = -2$

$f(0) = 5$

$f(4) = -27$

$f(7) = 54$

Så $x = 4$ gir globalt minimum $f(4) = \underline{\underline{-27}}$

og $x = 7$ gir globalt maksimum $f(7) = \underline{\underline{54}}$

Eks $f(x) = 12 - x$ med $D_f = [3, 10]$

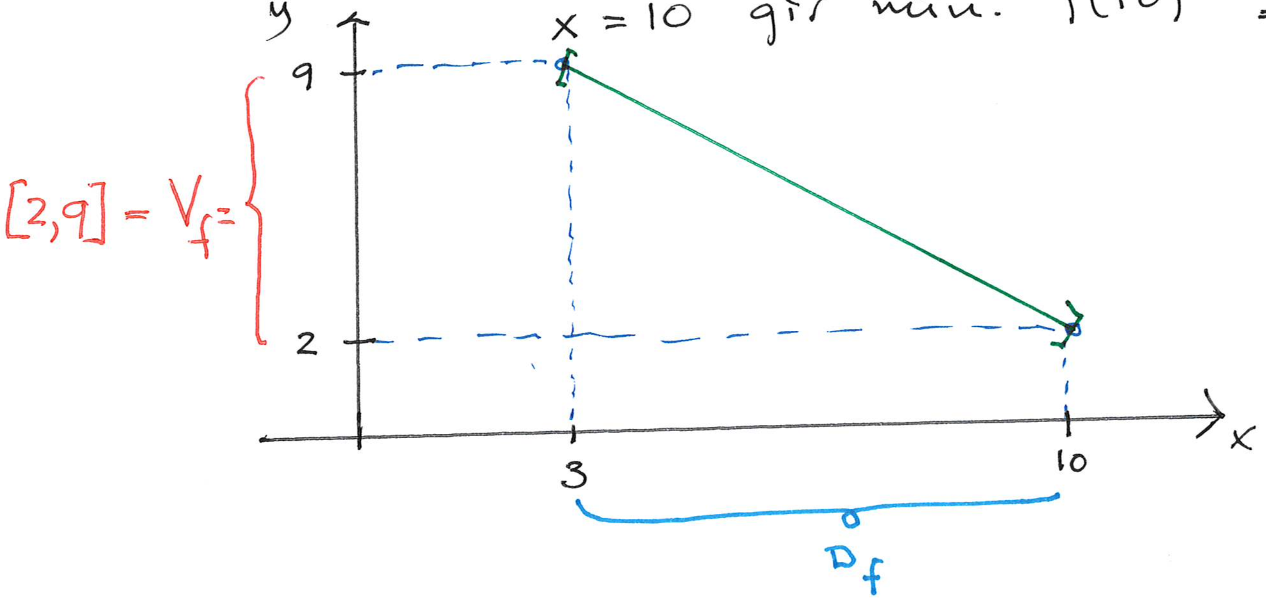
Maks/min:

(*) $f'(x) = -1 \neq 0$ så ingen stasjonære punkter

(*) ingen knekkpunkter ($f'(x)$ finnes overalt)

(*) endepkt: $x = 3$ gir maks. $f(3) = \underline{\underline{9}}$

$x = 10$ gir min. $f(10) = \underline{\underline{2}}$



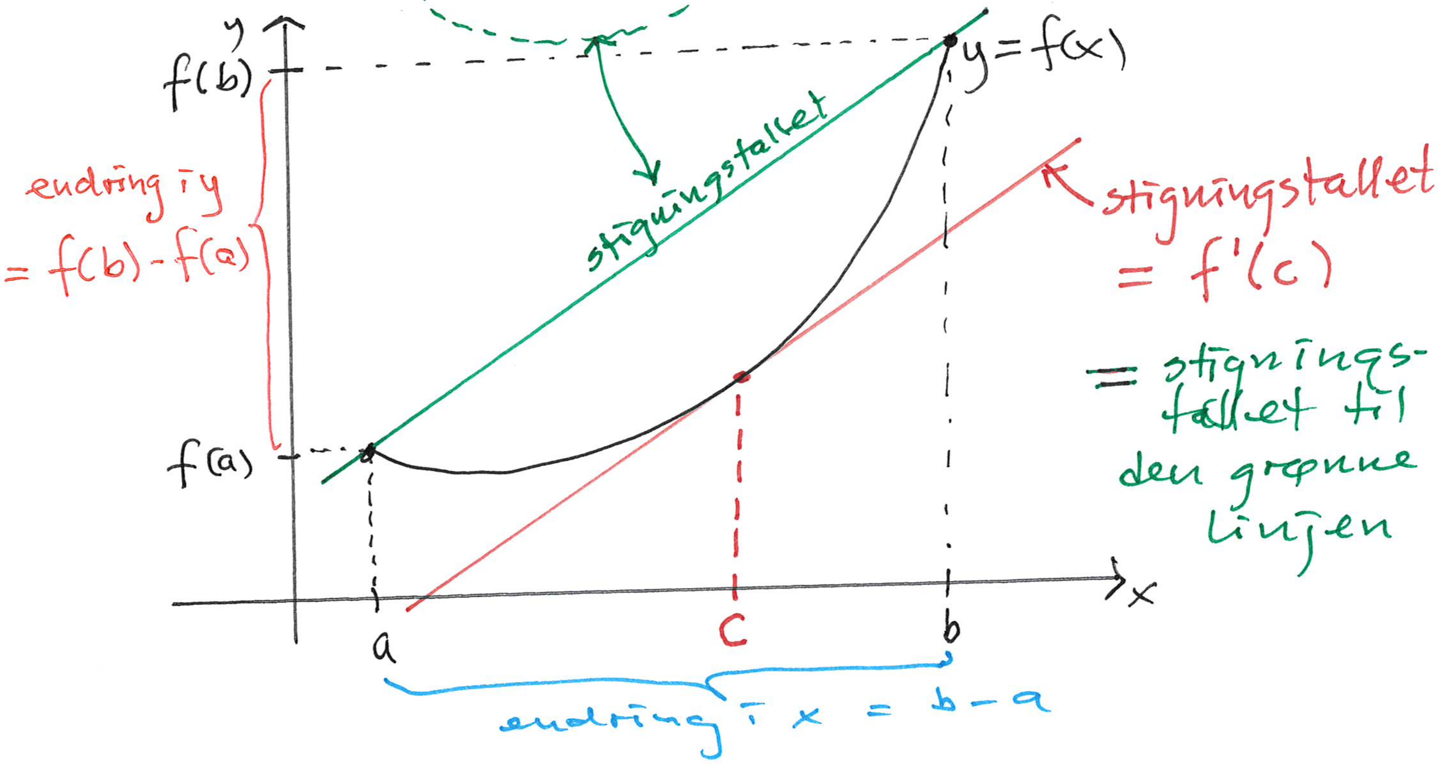
Eks $f(x) = 12 - x$ med $D_f = [3, 10\rangle$

Da er $V_f = \langle 2, 9]$. så $x = 3$ er fremdeles maksimumspunkt (med maks $= f(3) = 9$), men det finnes ikke noe minimumspunkt og ingen minimumsverdi.

3. Middelverdisetningen

Hvis $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ og deriverbar (ingen knekkpunkter) så finnes det et tall c mellom a og b $(a < c < b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\text{total endring i } y}{\text{total endring i } x}$$



Eks $f(x) = e^x + x^2$. Da $f(0) = e^0 + 0^2 = 1$

og $f(1) = e^1 + 1^2 = e + 1$

Ved middelverdisetningen finnes et tall c mellom 0 og 1 slik at

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{e+1-1}{1} = e$$

Merk $f'(x) = e^x + 2x$ (lett). Men vi klarer ikke løse likningen $f'(x) = e$ dvs $e^x + 2x = e$ eksakt