MET 1180, 2. forelesning, 29. aug. 2023, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon (alg. uttrykk, røtter & potenser, absoluttverdi)
2. Relativ endring og vekstfaktor
3. Renter
4. Nåverdi

1. Repetisjon

Brøker
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{10}{12}$$

og
$$\frac{x+3}{x+4}\cdot\frac{x-1}{x+2} = \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+4)\cdot(x+2)}$$

oppg 1i
$$\frac{18}{4}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{12} = \frac{18\cdot\frac{2}{3}}{4\cdot 12} = \frac{\frac{18}{1}\cdot\frac{2}{3}}{4\cdot 12}$$

$$= \frac{\frac{18\cdot 2}{1\cdot 3}}{4\cdot 12} = \frac{\frac{18\cdot 2}{3}\cdot 3}{4\cdot 12\cdot 3} = \frac{18\cdot 2}{4\cdot 12\cdot 3} = \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppg 2i
$$\frac{x^2-3x}{x(y-3)}\cdot\frac{xy^2-9x}{x-3} = \frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}(y-3)}\cdot\frac{x(y^2-9)}{x-3}$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)}\cdot x\cdot(y^2-9)}{(y-3)\cdot\cancel{(x-3)}} = \frac{x\cdot\cancel{(y-3)}\cdot(y+3)}{\cancel{(y-3)}}$$

$$= \underline{\underline{x\cdot(y+3)}}$$

Prioriteringsregler

$2 + 3 \cdot 4 = 14$

$(2+3) \cdot 4 = 20$

Alg / Chain

$-3^2 = (-1) \cdot 3 \cdot 3 = -9$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3)$

og $-3 \cdot 4 = -12$

Røtter / potenser

$\sqrt{5} \overset{?}{=} 5^{0,5} = 5^{\frac{1}{2}}$. Sjekker:

$$5^{0,5} \cdot 5^{0,5} = 5^{0,5+0,5} = 5^1 = 5$$

Altså er $5^{0,5} = \sqrt{5}$.

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ fordi $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{3} \cdot 3} = 5^1 = 5$

og $\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 5^{\frac{1}{3} \cdot 6} = 5^2$

Dessuten $5^{-1} = \frac{1}{5}$ og $5^{-2} = \left(5^{-1}\right)^2 = \frac{1}{5^2}$

og $5^{-\frac{1}{2}} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Mønster Hvis m, n er heltall, $n > 0$

og $a > 0$ (pos. tall) så er

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Oppg 6i

$$\frac{\sqrt{1,03}^{\,10}}{1,03^4} = \frac{\left(1,03^{\frac{1}{2}}\right)^{10}}{1,03^4} = \frac{1,03^{\frac{1}{2} \cdot 10}}{1,03^4}$$

$$= \frac{1,03^5}{1,03^4} = 1,03^{5-4} = \underline{\underline{1,03}}$$

Oppg Beregn $1{,}11^{\sqrt{2}}$ på kalkulatoren.
(Svar: 1,159035....)

Løsning $1{,}11$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$

Samme grunntall: $2^{1,5} \cdot 2^{3,8} = 2^{1,5+3,8} = 2^{5,3}$

Samme eksponent: $2^4 \cdot 3^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = (2 \cdot 3)^4$

Eks $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot 3}$

Mønster $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

Oppg Beregn $1{,}12^{-1}$ på kalk.

Løsning 1 $1{,}12$ $\boxed{y^x}$ 1 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$

Løsning 2 $1{,}12$ $\boxed{1/x}$ (fordi $1{,}12^{-1} = \frac{1}{1{,}12}$)

Start: 15^{00}

Absoluttverdi

Eks $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3 = -(-3) = |-3|$

så $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$

Oppg 7j Løs likn. $x|x| = 9$.

To tilfeller: $x \geq 0$ gir likn $x^2 = 9$ med løsn. $x = 3$
(fordi $x = -3 < 0$ ikke er med)

$x < 0$ gir likn. $-x^2 = 9$
dvs $x^2 = -9$ – ingen løsn.

Konkl: Likn. $x|x| = 9$ har løsningen $\underline{\underline{x = 3}}$

2. Relativ endring og vekstfaktor

$$\text{Relativ endring} = \frac{\text{ny verdi} - \text{gammel verdi}}{\text{gammel verdi}}$$

Husk: $\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$3\,\% = 3 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}03$

Eks Kåres timelønn har økt fra 163 kr til 181 kr. Da er den relative endringen

$$\frac{181\text{ kr} - 163\text{ kr}}{163\text{ kr}} = \frac{18}{163} = 11{,}0\,\%$$

$$\text{Vekstfaktor} = 1 + \text{relativ endring}$$
(vekstraten)

Eks Vekstfaktoren til Kåres timelønnsøkning er $1 + 11{,}0\,\% = 1{,}110$

Oppg I fjor tjente Kåre 54 000 m. 163 kr/time
Hva vil han tjene i år hvis han jobber like mye (med den nye timelønnen)?

Løsning $54000 \cdot 1{,}11 = \underline{\underline{59\,940}}$

3. Renter

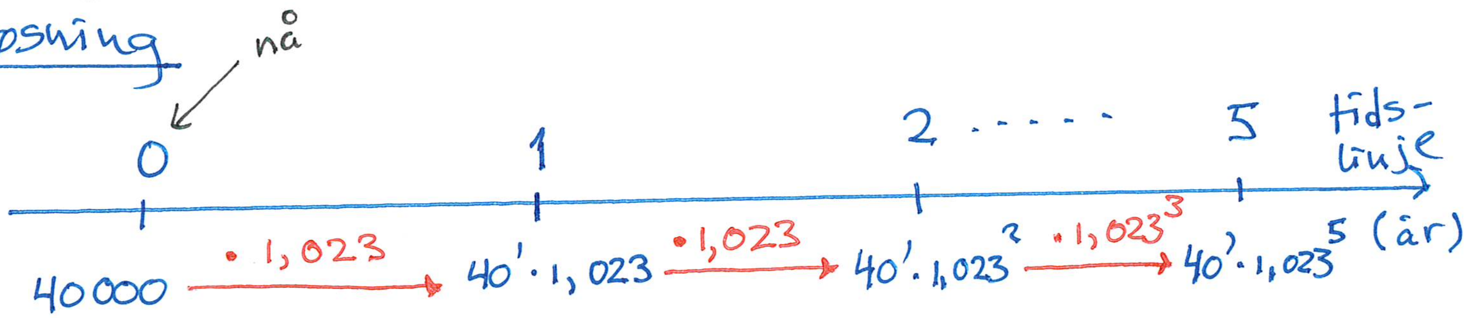
Eks Du setter 40 000 på en konto som gir 2,3 % årlig rente. Rentene kapitaliseres (legges til kapitalen) hvert år, etterskuddsvis. Etter ett år er balansen (hva som står på konto) gitt som

$$40\,000 + 40\,000 \cdot 2{,}3\,\%$$

$$= 40\,000 \cdot \underbrace{(1 + 2{,}3\,\%)}_{\text{vekstfaktor}} = \underline{\underline{40\,920{,}00}}$$

Oppg Hva er balansen etter 5 år ?

Løsning



$$\underline{\underline{40\,000 \cdot 1{,}023^5}} = \underline{\underline{44\,816{,}52}}$$

Eks Hvis rentene kapitaliseres kvartalsvis er vekstfaktoren for ett kvartal

$$1 + \frac{2{,}3\,\%}{4} = 1{,}00575$$

Balansen etter ett år : $40\,000 \cdot 1{,}00575^4$

Balansen etter 5 år : $40\,000 \cdot 1{,}00575^{4 \cdot 5}$

Vi sier at 2,3 % er den nominelle (års) renten

Årlig vekstfaktor er $1{,}00575^4 = 1{,}023199$

Den effektive renten er 2,3199 %.

Mønster

nominell rente

$$B = B_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{m}$$

– antall terminer totalt

balansen etter m terminer

innskudd

antall rentefterminer pr. år

---

4. Nåverdi

La K_0 være en investering/innskudd/betaling i dag. Fremtidsverdien K_n av K_0 om n år (el. terminer) med terminrente r er

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Omvendt: Anta K_n skal betales om n år. Da er nåverdien K_0 av K_n med rente r gitt som

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$$

Eks Bestem nåverdien av 30 mill utbet. om 5 år med 8 % rente.

Løsn: $K_0 = \dfrac{30 \text{ mill}}{1{,}08^5} = 20{,}42$ mill.