MET 1180, 21. forelesning, 7. nov. 2023, Runar Ile

Plan:
1. Repetisjon (oppg. fra forrige uke)
   1d implisitt derivasjon
   2 implisitt definerte kurver
   6b konvekse/konkave funksjoner
   8b konveks optimering
2. l'Hopitals regel

1. Repetisjon

1d) $$x^3 - 3xy + y^2 = 0 \qquad (*)$$

Vi finner et uttrykk for y' i y og x ved å derivere begge sider av likningen med hensyn på x. Får en ny likning med x, y og y', og løser den for y'.

Hjelperegninger:

$$(x \cdot y)'_x \overset{\text{prod. regel}}{=} (x)'_x \cdot y + x \cdot (y)'_x$$
$$= 1 \cdot y + x \cdot y' = y + xy'$$

$$(y^2)'_x \overset{\text{Kjerne-regelen}}{=} 2y \cdot (y)'_x = 2yy'$$

Fra $(*)$ får vi da
$$3x^2 - 3(y + xy') + 2yy' = 0$$

Løser likningen for y':
$$3x^2 - 3y - 3xy' + 2yy' = 0$$

dvs $$(2y - 3x)y' = 3y - 3x^2 \quad \Big| : (2y - 3x)$$

$$\underline{\underline{y' = \frac{3y - 3x^2}{2y - 3x}}} = \underline{\underline{\frac{3(y - x^2)}{2y - 3x}}}$$

Antar $\underline{x = 2}$ og løser (*) innsatt $x=2$.

dvs $\quad 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot y + y^2 = 0$

$$y^2 - 6y = -8$$

$$(y-3)^2 = -8+9 = 1$$

som gir $\quad y - 3 = 1 \quad$ el. $\quad y - 3 = -1$

$$\underline{\underline{y = 4}} \quad \text{el.} \quad \underline{\underline{y = 2}}$$

Vi bruker ettpunktsformelen til å finne tangentfunksjonene i punktene $(2,4)$ og $(2,2)$ på kurven

$\underline{(2,4)}$ $\quad y' = \dfrac{3(4-2^2)}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2} = 0$ så tangentfunksjonen er konstant så $\underline{\underline{h_1(x) = 4}}$

$\underline{(2,2)}$ $\quad y' = \dfrac{3(2-2^2)}{2 \cdot 2 - 3 \cdot 2} = \dfrac{3 \cdot (-2)}{-2} = 3$

Ettpunktsformelen:

$$h_2(x) - 2 = 3 \cdot (x-2)$$

dvs $\quad \underline{\underline{h_2(x) = 3x - 4}}$

MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2023
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 19 – 20

Kap 4.5, 4.7: Implisitt derivasjon. Den andrederiverte og konvekse/konkave funksjoner.

[L] **4.5** 1-3
[L] **4.7** 1-11

Flervalgseksamen 2016v oppg 15
Flervalgseksamen 2016h oppg 11
Flervalgseksamen 2017v oppg 11

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 2/11 fra 10 i D1-065/70

Oppgave 1 Uttrykk y' ved hjelp av y og x ved implisitt derivasjon. Finn alle løsninger for y gitt at $x = a$ og bestem funksjonsuttrykkene for tangentene i disse punktene.

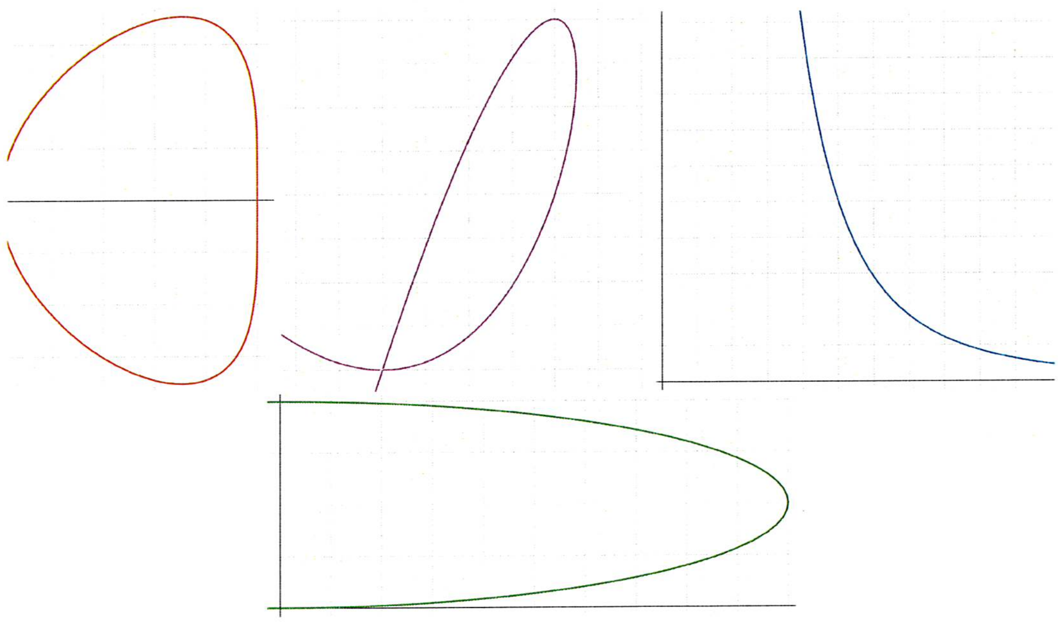
a) $x^2 + 25y^2 - 50y = 0$ og $a = 4$

b) $x^{3,27}y^{1,09} = 1$ og $a = 1$

c) $x^4 - x^2 + y^4 = 0$ og $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $x^3 - 3xy + y^2 = 0$ og $a = 2$

Oppgave 2 I figur 1 ser du grafene til de implisitt definerte kurvene i oppgave 1. Finn kurvene og likningene som hører sammen. Tegn også inn tangentene fra oppgave 1.



Figur 1: Fire implisitt definerte kurver

2) Elliminasjon er strategien.

(1) I 1a, c og d er det to y-verdier for én x-verdi. Ingen av disse kan derfor være den blå kurven (den til høyre) så 1b må derfor være den blå.

(2) Den røde (til venstre) og den grønne (nederst) er symmetriske om horisontale linjer. Da er også to tangenter gjennom punkter med samme x-verdi symmetriske, dvs har like stigningstall med motsatt fortegn. Dette gjelder bare 1a og c. Så 1d må være den fiolette.

(3) Hvis de tykke linjene i koordinatsystemene er koordinatakser vil den røde grafen gi én pos. og én neg. y-verdi for en gitt x-verdi, mens den grønne gir to pos. y-verdier. Dermed er 1a den grønn og 1c den røde grafen

– dere skulle også tegne inn tangentene

Oppg 6b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) - \frac{x}{4} + 1$

Merk $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$

så $f(x)$ er definert på hele tallinjen

Kjerneregelen for $[\ln(x^2-2x+2)]'$

med $u = x^2 - 2x + 2$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = 2x - 2$ $\qquad g'(u) = \frac{1}{u}$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{1}{4}}}$$

brøk-regel

$$f''(x) = \frac{(2x-2)'(x^2-2x+2) - (2x-2)(x^2-2x+2)'}{(x^2-2x+2)^2} - 0$$

$- (4x^2 - 8x + 4)$

$$= \frac{2(x^2-2x+2) - (2x-2)^2}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}}} = \frac{-2x(x-2)}{[(x+1)^2+1]^2}$$

Konveks/konkav for $f(x)$: Finner fortegnsskjema for $f''(x)$.

Løser likningen $f''(x) = 0$

dvs $-2x\cdot(x-2) = 0$ (og nevneren ≥ 1)

dvs $-2x = 0$ el. $x - 2 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ el. $\underline{\underline{x = 2}}$

Fortegnsskjema for $f''(x)$:

Start : 15.09

<u>Konklusjon</u> $f(x)$ er konkav for x i $\langle \leftarrow, 0]$

— " — konveks — " — $[0, 2]$

— " — konkav — " — $[2, \rightarrow \rangle$

Dessuten er $\underline{\underline{x = 0}}$ og $\underline{\underline{x = 2}}$ vendepunkter for $f(x)$ fordi $f''(x)$ skifter fortegn for $x = 0$ og $x = 2$.

8b) • Bestem de (lok.) maks/min.pkt.ene for f(x)

• Bruk konveks/konkav for å avgjøre om de lok. maks/min er globale.

• Beregn maks/min. for f(x).

$$f(x) = \frac{-1}{x(x-6)} \quad , \quad D_f = \langle 0, 6 \rangle$$

• Beregner $f'(x) \overset{\text{brøk-regelen}}{=} \dfrac{2x-6}{[x(x-6)]^2}$

Stasjonære punkter: Løser likningen $f'(x)=0$.

dvs $2x-6=0$ (og $x(x-6) \neq 0$)

$\underline{x=3}$ ($3\cdot(3-6) \neq 0$ – så ok)

Telleren til $f'(x)$ skifter fortegn fra – til + ved $x=3$, og nevneren er pos., så $f'(x)$ skifter fortegn fra – til + ved $x=3$ og $\underline{\underline{x=3}}$ er derfor et (lok.) minimums-punkt.

• Beregner $f''(x) = \left[\dfrac{2x-6}{x^2(x-6)^2}\right]'$

Hjelperegning: $[x^2\cdot(x-6)^2]' = 2x\cdot(x-6)^2 + x^2\cdot 2\cdot(x-6)\cdot 1$

$= 2\cdot x\cdot(x-6)(x-6+x) = 2x(x-6)(2x-6)$

$$f''(x) \overset{\text{brøkregelen}}{=} \frac{2\cdot x^2(x-6)^2 - (2x-6)\cdot 2x(x-6)(2x-6)}{\left[x^2(x-6)^2\right]^2}$$

$$= \frac{2\cancel{x}\cancel{(x-6)}\left[x(x-6) - (2x-6)^2\right]}{x^{\cancel{4}3}\cdot(x-6)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{2\left[-3x^2 + 18x - 36\right]}{x^3\cdot(x-6)^3}$$

$$= \frac{-6\left[x^2 - 6x + 12\right]}{x^3(x-6)^3} = \frac{-6\left[(x-3)^2+3\right]}{x^3(x-6)^3}$$

For $x \in \langle 0, 6\rangle$ er $x^3 > 0$ og $(x-6)^3 < 0$

Dessuten er $(x-3)^2 + 3 \geq 3$ så

$f''(x) = \frac{\text{neg.}}{\text{neg.}} > 0$ for alle x i $D_f = \langle 0, 6\rangle$

Altså er $f(x)$ konveks for alle x i D_f

og $x = 3$ (det stasjonære punktet)

er derfor et globalt minimumspunkt.

- Minimumsverdien til $f(x)$ er

$f(3) = \frac{-1}{3\cdot(6-3)} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$

– ingen maksimale verdier.

2. l'Hopitals regel

Grenser av typen $\frac{0}{0}$ og $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Skrivemåte $\lim_{x \to 5} f(x)$ er det tallet som $f(x)$ nærmer seg mer og mer når x nærmer seg 5 mer og mer.

Eks $f(x) = \frac{3x-3}{\ln(x)}$. Vil finne $\lim_{x \to 1} f(x)$

teller: $3x - 3 \xrightarrow[x \to 1]{} 3 \cdot 1 - 3 = 0$

$\ln(x) \xrightarrow[x \to 1]{} \ln(1) = 0$

Altså et "$\frac{0}{0}$"-uttrykk

Kan bruke l'Hôpital for å komme videre:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(3x-3)'}{[\ln(x)]'} = \lim_{x \to 1} \frac{3}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{\left(\frac{1}{1}\right)} = \underline{\underline{3}}$$

f. eks. $f(0{,}99) = \frac{3 \cdot 0{,}99 - 3}{\ln(0{,}99)} = 2{,}9850$

og $f(1{,}01) = \frac{3 \cdot 1{,}01 - 3}{\ln(1.01)} = 3{,}0150$

NB: Må være $\frac{0}{0}$ el. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Da deriverer vi teller og nevner hver for seg og prøver å finne grensen til den nye brøken.

Eks $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{e^x - 1}$

teller: $3x \xrightarrow[x\to 0]{} 3\cdot 0 = 0$

nevner: $e^x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 - 1 = 0$

så $\frac{0}{0}$.

$$\overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3}{e^x} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$$

Eks $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$

"$\frac{\infty}{\infty}$" "$\frac{\infty}{\infty}$"