MET 1180, 23. forelesning, 14. nov. 2023, Runar Ile

Plan: 1. Repetisjon: l'Hôpitals regel (oppg 1h)
Kostnadsfunksjoner (oppg 3c)

2. Elastisitet (kap 4.9)

---

1. Rep: l'Hôpitals regel. For grenser $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

- Deriverer teller og nevner hver for seg.
- Prøver å finne den samme grensen for den nye brøken.

Oppg 1h
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\text{l'Hôp}}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{1}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{2}}$$

Betydning: Ingen vertikal asymptote for $x=1$

Ekstra!
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{\text{l'Hôp}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)} \quad \Big| \cdot \frac{x\cdot 2\cdot\sqrt{x}}{x\cdot 2\cdot \sqrt{x}} = 1$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{0}}$$

Betydning: $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ har horisontal asymptote $y=0$

Kostnadsfunksjoner.

Oppg 3c $\quad K(x) = 400\cdot e^{0,001\cdot x^2} \quad (x \geq 0)$
er en kostnadsfunksjon fordi

(1) $K(0) = 400\cdot e^{0,001\cdot 0^2} = 400\cdot e^{0} = 400 > 0$

(2) $K'(x) = 400\cdot 0,001\cdot 2x\cdot e^{0,001\cdot x^2}$
$= 0,8\cdot x\cdot e^{0,001\cdot x^2} \geq 0$ for $x \geq 0$

③ $K''(x) \overset{\substack{\text{prod.}\\\text{regel}}}{\underset{\substack{\text{+ litt}\\\text{kjerne-}\\\text{regel}}}{=}} 0{,}8 \cdot e^{0{,}001x^2} + 0{,}8x \cdot 0{,}001 \cdot 2x \cdot e^{0{,}001x^2}$

$$= \underset{\substack{\vee\\0}}{0{,}8} \cdot \underbrace{(1 + 0{,}002x^2)}_{\substack{\vee\\0}} \cdot \underbrace{e^{0{,}001x^2}}_{\substack{\vee\\0}} > 0$$

Fordi $K''(x) > 0$, er kostnadsoptimum løsningen på likningen

$$K'(x) = A(x) \qquad \left(A(x) = \frac{K(x)}{x}\right)$$

dvs $\quad 0{,}8x\, e^{0{,}001x^2} = \dfrac{400\, e^{0{,}001x^2}}{x} \qquad | \cdot x$

gir $\quad 0{,}8x^2 e^{0{,}001x^2} = 400\, e^{0{,}001x^2} \qquad | : e^{0{,}001x^2}$

$$0{,}8x^2 = 400 \qquad | : 0{,}8$$

$$x^2 = \frac{400}{0{,}8} = 500$$

og kostnadsoptimum er $x = \underline{\underline{\sqrt{500}}} = \underline{\underline{22{,}36}} \qquad (x \geq 0)$

Den minimale enhetskostnaden er

$$A(\sqrt{500}) = K'(\sqrt{500}) = 0{,}8 \cdot \sqrt{500} \cdot \underbrace{e^{0{,}001 \cdot \sqrt{500}^2}}_{e^{0{,}5}}$$

$$= \underline{\underline{29{,}49}}$$

---

2. Elastisitet

p = pris/enhet

$D(p)$ = etterspørselen hvis prisen er p
= ant. solgte enheter —— " —— .

Problemet med enheter.

Eks Et fat Nordsjøolje koster \$ 82,53

En liter —— " —— NOK 5,32

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

disse tallene er uavhengige av enheter

Eks På en måned synker prisen på en vare fra 12 tusen til 10 tusen og etterspørselen øker fra 50 mill. til 60 mill.

Priselastisiteten til etterspørselen er

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{60-50}{50}\right)}{\left(\frac{10-12}{12}\right)} = \frac{\left(\frac{10}{50}\right)}{\left(\frac{-2}{12}\right)} = \frac{120}{-100} = \underline{\underline{-1,2}}$$

Start: 15.02

Tolkning Hvis prisen øker med 1 % fra 12 tusen vil etterspørselen falle med 1,2 %

Teori Vi har en etterspørselsfunksjon $D(p)$.

Hvis prisen endres fra p til $p+h$ er relativ prisendring $\frac{p+h-p}{p} = \frac{h}{p}$

$$\frac{\text{relativ etterspørselsendring}}{\text{relativ prisendring}}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}\right)}{\left(\dfrac{h}{p}\right)} \qquad \Big| \cdot \frac{p \cdot D(p)}{p \cdot D(p)} = 1$$

$$\frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

$$\Big\downarrow \; h \to 0 \quad \text{(prisendring nærmer seg 0)}$$

$$\boxed{\varepsilon(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}}$$

Dette er den momentane priselastisiteten til etterspørselsfunksjonen $D(p)$.

Eks $D(p) = 50 - p$ for $0 < p < 50$

Da er $D'(p) = -1$ så $\varepsilon(p) = \dfrac{(-1) \cdot p}{50 - p}$

$$= \underline{\underline{\frac{-p}{50-p}}}$$

Viktig spørsmål: Vil inntekten gå opp eller ned hvis prisen øker.

Inntekt: $I(p) = p \cdot D(p)$

– er $I(p)$ avtagende eller voksende?

Altså: er $I'(p)$ neg. eller pos.?

$$I'(p) \overset{\text{prod. reg.}}{=} 1 \cdot D(p) + p \cdot D'(p)$$

$$= D(p)\left[1 + \frac{p \cdot D'(p)}{D(p)}\right]$$

$$= \underbrace{D(p)}_{\text{alltid pos.}} \cdot \underbrace{[1 + \varepsilon(p)]}_{\text{pos. el. neg.?}}$$

Hvis $\underline{\varepsilon(p) < -1}$

får vi neg. $I'(p)$

så $I(p)$ er avtagende

Kalles <u>elastisk</u> etterspørsel

Hvis $\underline{\varepsilon(p) > -1}$

får vi pos. $I'(p)$

så $I(p)$ er voksende

Kalles <u>uelastisk</u> etterspørsel

Hvis $\underline{\varepsilon(p) = -1}$

er $I'(p) = 0$

$I(p)$ har et stasjonært punkt

– <u>nøytralelastisk</u> etterspørsel

<u>Eks</u> $D(p) = 50 - p$, $0 < p < 50$

Fikk $\varepsilon(p) = \dfrac{-p}{50-p}$.

<u>Spørsmål</u> For hvilke p er etterspørselen elastisk?

Løser ulikheten $\mathcal{E}(p) < -1$, dvs

$$\frac{-p}{50-p} < -1 \quad | +1$$

$$\frac{-p}{50-p} + 1 < 0 \quad \text{dvs} \quad \frac{-p+50-p}{50-p} < 0$$

$$\text{dvs} \quad \frac{50-2p}{\underbrace{(50-p)}_{\text{er pos. fordi } p<50}} < 0 \quad \text{dvs} \quad 50-2p < 0$$

$$\text{dvs} \quad 50 < 2p \quad \text{dvs} \quad \underline{p > 25}$$

Så elastisk etterspørsel for $25 < p < 50$

Dessuten uelastisk etterspørsel for $0 < p < 25$

og nøytralelastisk —‖— $p = 25$