MET 1180, forelesning 25, 9. jan. 2024, Runar Ile

Plan
1. Intro. til vårens MET 1180
2. Arealspørsmålet
3. Det ubestemte integralet: Anti-derivasjon
4. Arealet under grafen: Et eks.
5. Anti-deriverte til $f(x) = \frac{1}{x}$.

---

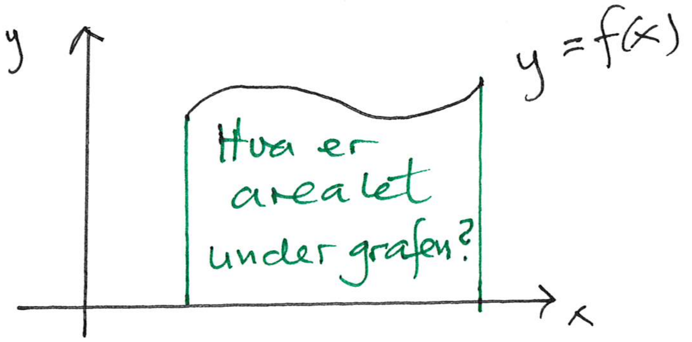
1. Intro. til vårens MET 1180

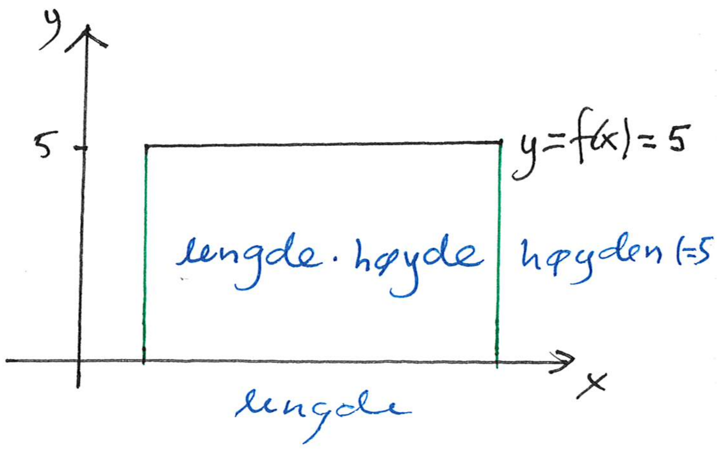
3 temaer:
- A. Integrasjon
- B. Vektorer og matriser
- C. Funksjoner i to variabler: $f(x,y)$.

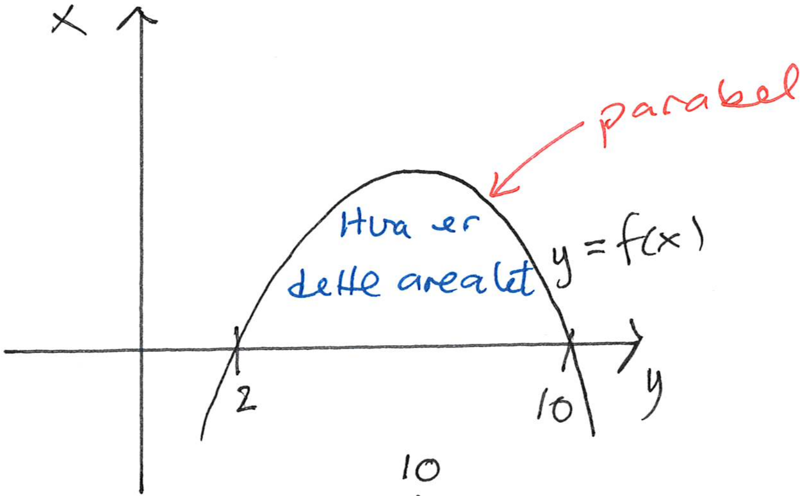
Eksamen 15/5 (?) 5t, teller 60 %

---

2. Arealspørsmålet







Svar: $\int_2^{10} f(x)\,dx$ (et tall) – kalles et bestemt integral

3. Det ubestemte integralet

Hvis den deriverte er kjent, hva er funksjonen?

Eks Hvis $2x$ er den deriverte, hva er funksjonen?

Prøver $(x^2)' = 2x$ - ok

Prøver $(x^2+10)' = 2x$ - ok

Da er både x^2 og x^2+10 anti-deriverte til $2x$.

Eks $\frac{1}{x}$ $(x>0)$ er den deriverte, hva er funksjonen?

Prøver $(x^{-2})' = -2\cdot x^{-2-1} = -2\cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

nei...

Prøver $(x)' = 1$ - passer heller ikke

Prøver $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$ - ok

Prøver $[\ln(2x)]' = 2\cdot\frac{1}{u} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}x} = \frac{1}{x}$ -ok

Kjerneregelen:

$u = 2x$ og $g(u) = \ln(u)$

$u' = 2$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

Så både $\ln(x)$ og $\ln(2x)$ er anti-deriverte til $\frac{1}{x}$ når $x>0$

Mønster Gitt $f(x)$, finner $F(x)$ slik at $F'(x) = f(x)$.

Eks: $f(x) = 2x$, $F(x) = x^2+10$ **Eks** $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln(x)+9$ $(x>0)$

Notasjon

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

integrasjonsnotasjon

x her betyr at vi anti-deriverer m.h.p. x

et ubestemt tall, en konstant

- dette er mengden av alle anti-deriverte til $f(x) = 2x$
- kalles det ubestemte integralet til $2x$

Oppg Finn de ubestemte integralene

a) $\int 12x^2\,dx = \underline{\underline{4x^3 + C}}$ (C er en konstant)

b) $\int x^3\,dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + C}}$

c) $\int e^x\,dx = \underline{\underline{e^x + C}}$

d) $\int 5e^{5x}\,dx = \underline{\underline{e^{5x} + C}}$

Kjerneregel:
$u = 5x$ og $g(u) = e^u$
$u' = 5$ $g'(u) = e^u$

e) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + C}}$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $-\frac{1}{x} = -x^{-1}$

Start: 11.02

To mønstre

$$\int x^n\,dx \overset{(n \neq -1)}{=} \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

$$\int e^{ax}\,dx \overset{(a \neq 0)}{=} \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + C$$

Eks $\int (10 - 8e^{4x})\,dx$

$= \int 10\,dx - \int 8e^{4x}\,dx$ finner anti-deriverte for hvert ledd

$= 10x + C_1 - 2e^{4x} + C_2 = \underline{\underline{10 - 2e^{4x} + C}}$

Sjekk $(10x - 2e^{4x} + C)'$

$= (10x)' - 2(e^{4x})' + (C)'$

$= 10 \cdot 1 - 2 \cdot 4e^{4x} + 0 = 10 - 8e^{4x}$ - ok!

Oppg Finn $\int (6x - e^{2x})\,dx$

Løsning Kan ta hvert ledd for seg:

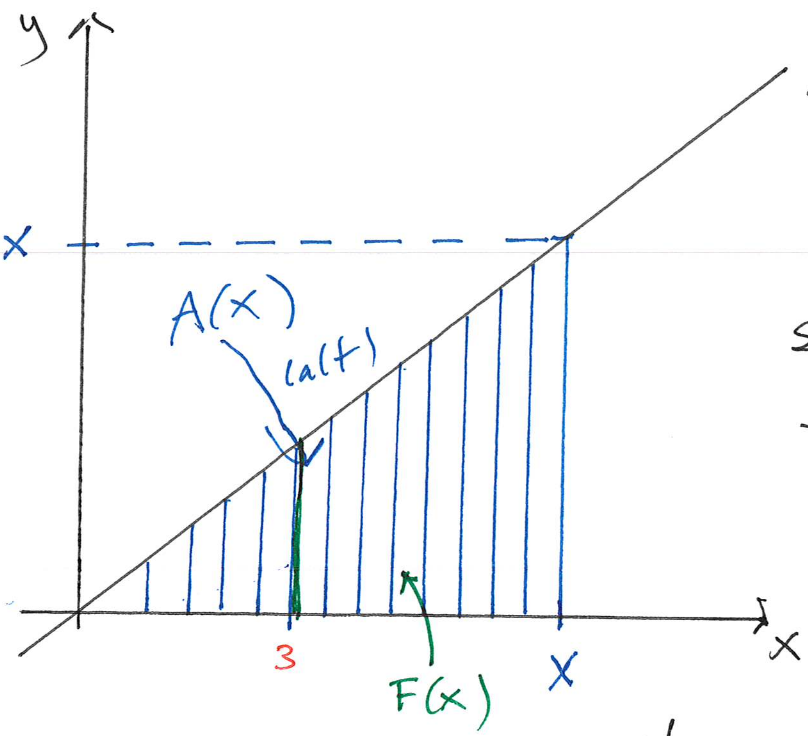
$\int 6x\,dx = 3x^2 + C_1$

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_2$

Så $\int 6x - e^{2x}\,dx = \underline{\underline{3x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} + C}}$

NB: $e^{2x} \neq e^{x^2}$

4. Arealet under grafen: Et eksempel



$y = f(x) = x$

Arealet av trekanten er $\frac{x^2}{2}$.

Setter $A(x) = \frac{x^2}{2}$ $(x \geq 0)$

– dette er arealfunksjonen

$$A(1) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A(3) = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$A(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

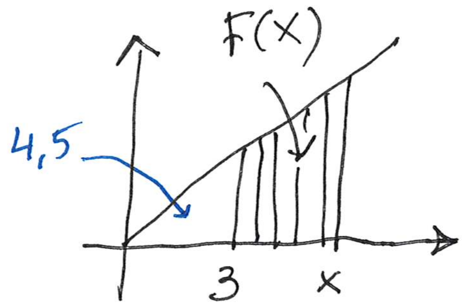
osv.

Merk: $A'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2)'$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x$$

$$= x = f(x).$$

En annen arealfunksjon:

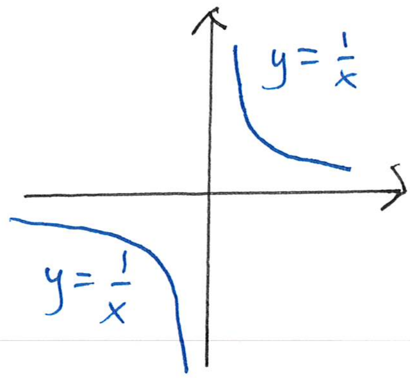


$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 4{,}5$$

$$F'(x) = x - 0 = f(x)$$

Så $A(x)$ og $F(x)$ er to forskjellige anti-deriverte til $f(x) = x$.

5. Anti-deriverte til $f(x) = \frac{1}{x}$



<u>Eks</u> $F(x) = \ln(-x)$ for $x < 0$.

Finner $f(x) = F'(x)$ ved å bruke kjerneregelen.

$u = -x$ og $g(u) = \ln(u)$

$u'(x) = -1$ $\quad g'(u) = \frac{1}{u}$

Da er $F'(x) = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{\cancel{(-1)}}{\cancel{(-1)} \cdot x}$

$$= \frac{1}{x}$$

Så hvis $f(x) = \frac{1}{x}$ og $x < 0$ så er

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + C$$

Men hvis $F(x) = \ln(x) + C$ $\quad (x > 0)$

så er $F'(x) = \frac{1}{x}$ så

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C \text{ for } x > 0$$

Samlet $\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \ln(-x) + C_1 & \text{for } x < 0 \\ \ln(x) + C_2 & \text{for } x > 0 \end{cases}$

<u>Eks</u> $F(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 3 & \text{for } x < 0 \\ \ln(x) + 5 & \text{for } x > 0 \end{cases}$ Da er $F'(x) = \frac{1}{x}$

Oppg. Beregn de ubestemte integralene.

a) $\int \frac{2}{x}\,dx$ for $x < 0$

b) $\int -\frac{6}{x}\,dx$ for $x > 0$

c) $\int \frac{1}{3x}\,dx$ for $x > 0$

d) $\int \frac{1}{x-2}\,dx$ for $x > 2$

e) $\int \frac{1}{x+5}\,dx$ for $x < -5$

f) $\int \frac{3x^2 - 2x + 5}{x}\,dx$ for $x > 0$

Løsninger

d) $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \underline{\underline{\ln(x-2) + C}}$ for $x > 2$

e) $\int \frac{1}{x+5}\,dx = \underline{\underline{\ln[-(x+5)] + C}}$ for $x < -5$

f) $\int \frac{3x^2 - 2x + 5}{x}\,dx = \int 3x - 2 + \frac{5}{x}\,dx$

$= \underline{\underline{\frac{3}{2}x^2 - 2x + 5\ln(x) + C}}$ for $x > 0$.