MET 1180, forelesning 28, 18. jan. 2024, Runar Ile

Plan 1. Delbrøksoppspalting
2. Bestemte integraler

1. Delbrøksoppspalting

EKS $\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}\,dx$

Prøver med subst:
$u = x^2-4x+3$
$du = (2x-4)\,dx$
$dx = \frac{1}{2x-4}\,du$

$= \int \frac{\cancel{x-2}}{u} \cdot \frac{1}{2x-4}\,du$

$2x-4 = 2(\cancel{x-2})$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+3| + C}}$

EKS $\int \frac{x}{x^2-4x+3}\,dx$

Subst: $u = x^2-4x+3$ virker ikke.
Kan ikke polynomdivid.

Bruker delbrøksoppspalting.

① Sjekk: grad(teller) < grad(nevner)
Hvis omv: Gjør polynomdivisjon

② Faktorisér nevner: $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$
Hvis vi ikke kan faktorisére kan vi ikke delbrøksoppspalte.

③ Skriver opp (for ulike røtter)

$$\frac{x}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

(Her er A og B tall som vi må finne).

④ Lager én brøk av HS: $= \frac{A(x-3)}{(x-1)(x-3)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$

$$= \frac{(A+B)x-(3A+B)}{(x-1)(x-3)}$$

(5) Tellerne må være like : Får likningssystem

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + B = 0 \end{cases}$$

(6) Løser likningssystemet

$$\begin{cases} B = 1 - A \\ 3A + 1 - A = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} B = 1 - A \\ 2A = -1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} B = 1 - (-\frac{1}{2}) \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(7) Skriver om brøken med verdiene for A og B og finner anti-deriverte:

$$\text{Dvs} \quad \frac{x}{(x-1)(x-3)} = \frac{-1/2}{x-1} + \frac{3/2}{x-3}$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 3}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x-3| + C}}$$ (egentlig 3 C-er!)

Eks $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$

(1) Sjekk : grad(teller) = 0
grad(nevner) = 2

(2) Fakt. nevner : $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

(3) $$\frac{2}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$ (A og B ukjent. tall)

(4) $$HS = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(A-B)x + (A+B)}{(1-x)(1+x)}$$

(5) Like tellere: Får likningssystem

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 2 \end{cases}$$ dvs (6) Løser: $$\begin{cases} A = B \\ 2B = 2 \end{cases}$$ dvs $$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

(7) Skriver brøken v.h.a. A og B og finner anti-deriverte:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

$$\int \frac{2}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln|1-x| + \ln|1+x| + C}}$$

EKS $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-2x+1}\,dx$

Prøver subst: $u = x^2 - 2x + 1$

Får $du = (2x-2)\,dx$.

Får $\displaystyle\int \frac{2x}{u} \cdot \frac{1}{(2x-2)}\,du$

og vi blir ikke kvitt x-ene — Gør ikke.

(1) $\text{grad}(2x) < \text{grad}(x^2-2x+1)$

(2) Faktoriserer nevner:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

(3) Deler opp brøken (med dobbeltrot):

$$\frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

(4) HS som én brøk: $\displaystyle\frac{A(x-1) + B}{(x-1)^2}$

(5) Får likningssystem fra $\dfrac{2x}{(x-1)^2} = \dfrac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - A = 0 \end{cases} \qquad = \frac{Ax + (B-A)}{(x-1)^2}$$

(6) Løser: $\begin{cases} A = 2 \\ B = 2 \end{cases}$

(7) Skriver om brøken og finner antiderivert:

$$\int \frac{2x}{x^2-2x+1}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{(x-1)^{-2}}\,dx$$

$$= 2\ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} + C$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

11.08

EKS $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ – nevneren kan ikke faktoriseres, kan derfor ikke delbrøksoppspalte.

EKS $\displaystyle\int \frac{2}{x^3-x}\,dx$ $\qquad x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$

Skriver $\dfrac{2}{x^3-x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$

$$HS = \frac{A\cdot\overbrace{(x-1)(x+1)}^{x^2-1} + B\cdot\overbrace{x(x+1)}^{x^2+x} + C\cdot\overbrace{x(x-1)}^{x^2-x}}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)}$$

gir likningssyst: $\begin{cases} A + B + C = 0 \\ B - C = 0 \\ -A = 2 \end{cases}$

får $\begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$

$$\int \frac{2}{x^3 - x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

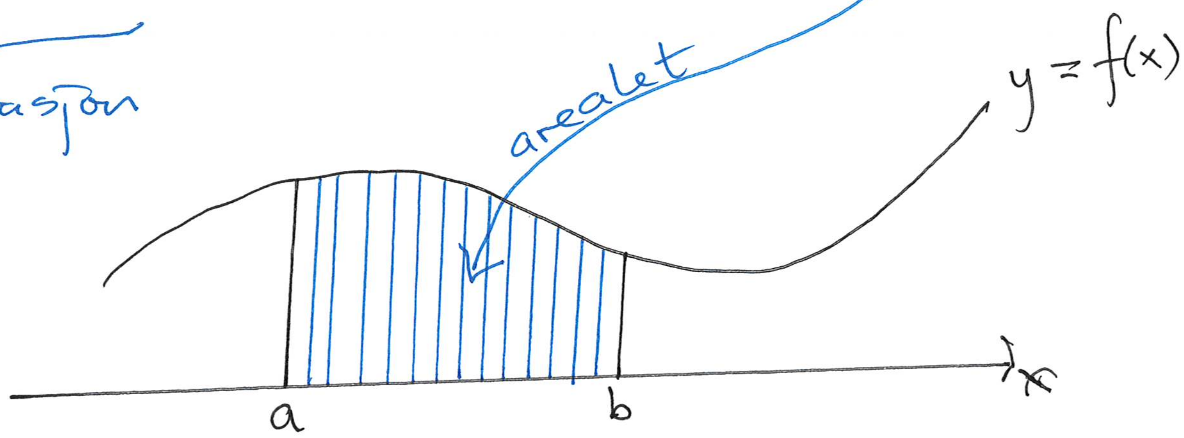
$$= \underline{\underline{-2\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + C}}$$

2. Det bestemte integralet („arealet under grafen")

Anta $F(x)$ er en anti-derivert til $f(x)$
(f. eks. $F(x) = x^2$ og $f(x) = 2x$)

Da er det bestemte integralet fra $x = a$ til $x = b$ gitt som

$$\underbrace{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}_{\text{notasjon}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{et tall}}$$



Eks Beregn $\int_1^{10} x+1 \, dx$.

Løsning Plan ① Finn en anti-derivert $F(x)$ til $f(x) = x-1$

② Sett inn grensene: $F(10) - F(1)$

① $\int (x+1)\,dx = \int x \, dx + \int 1 \, dx$

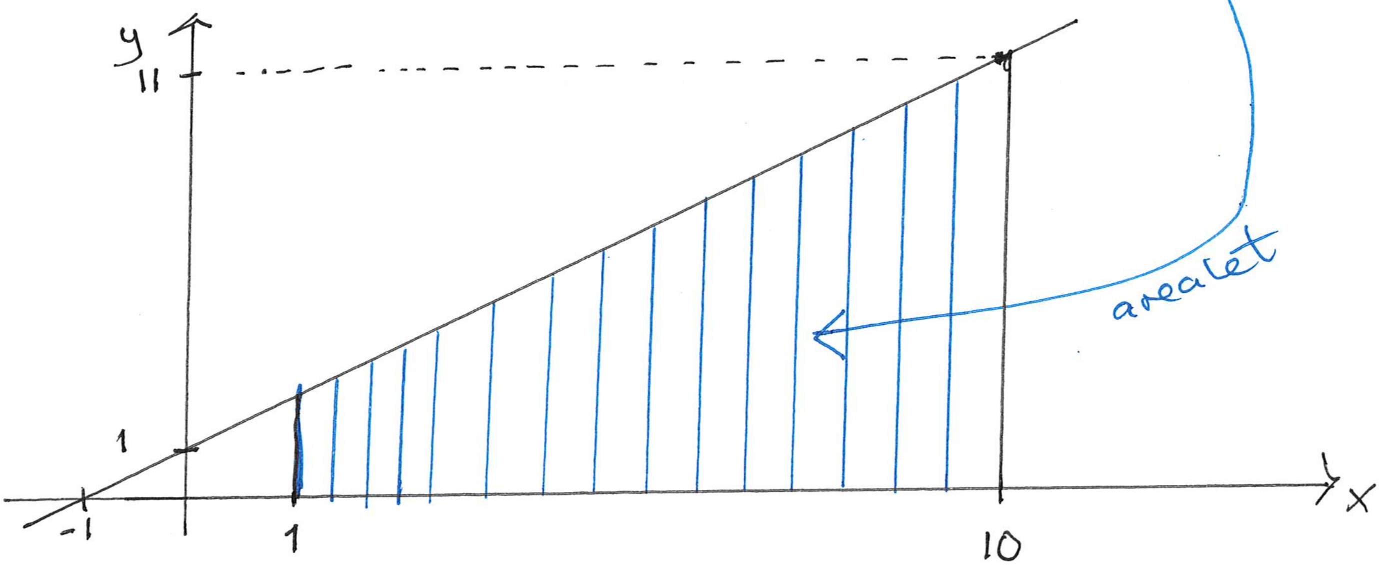
$= \frac{1}{2}x^2 + x + C$

Velger $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ (setter $C=0$)

② Da er $\int_1^{10} x+1 \, dx = F(10) - F(1) = \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^{10}$

$= \frac{1}{2}\cdot 10^2 + 10 - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot 100 + 10 - \frac{3}{2} = 60 - 1{,}5 = \underline{\underline{58{,}5}}$



NB Kunne også brukt $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$

Da får vi $\int_1^{10} x+1 \, dx = F(10) - F(1)$

$$= \frac{1}{2}(10+1)^2 - \frac{1}{2}(1+1)^2 = \frac{11^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{121-4}{2}$$

$$= \frac{117}{2} = \underline{\underline{58,5}}$$

Eks Beregn $\int_{-2}^{2} 4x^3 - 16x \, dx$

Løsning Finner en anti-derivert til $4x^3 - 16x$

Vi har $(x^4)' = 4x^3$ og $(8x^2)' = 8 \cdot 2x = 16x$

så $F(x) = x^4 - 8x^2$ er en anti-derivert

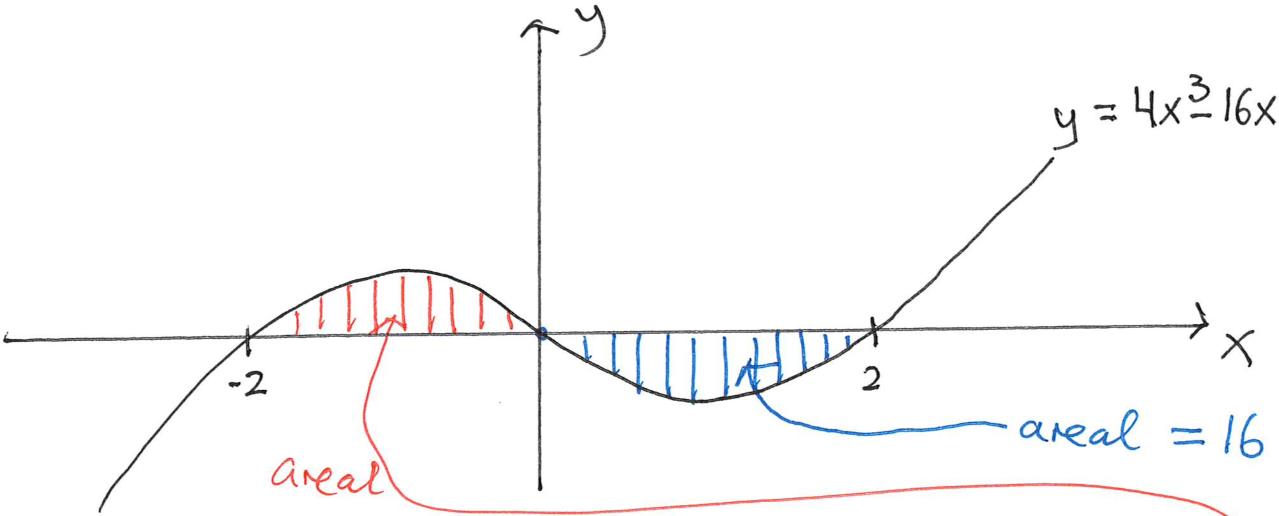
til $4x^3 - 16x$. Da er:

$$\int_{-2}^{2} 4x^3 - 16x \, dx = F(2) - F(-2) = \left[x^4 - 8x^2\right]_{-2}^{2}$$

$$= 2^4 - 8 \cdot 2^2 - \left((-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2\right)$$

$$= 16 - 32 - (16 - 32) = \underline{\underline{0}}$$

Men skal ikke dette være et areal (dvs positivt tall)?



$$\int_{-2}^{0} 4x^3 - 16x \, dx = F(0) - F(-2) = 0 - (-16) = 16$$

$$\int_{0}^{2} 4x^3 - 16x \, dx = F(2) - F(0) = -16 - 0 = -16$$

– fordi grafen går under x-aksen for x mellom 0 og 2, blir integralet = – arealet.

Derfor $\int_{-2}^{2} 4x^3 - 16x \, dx = 16 - 16 = 0$.