MET1180, forelesning 3, 31. aug. 2023, Runar Ile

Plan 1. Noen eksempler

2. Den totale nåverdien til en kontantstrøm

---

## 1. Noen eksempler

Oppg Verdien til Kåres leilighet øker med 10% det første året og faller med 30% det andre året. Beregn den relative verdiendringen for disse to årene tilsammen. (Hint: svaret er ikke $-20\%$)

Løsning

Relativ verdiendring første år: $r_1 = 0{,}1$

——— " ——— andre —"—: $r_2 = -0{,}3$

Vekstfaktor for det første året: $1+r_1 = 1{,}1$

——— " ——— andre —"— : $1+r_2 = 0{,}7$

——— " ——— de to årene tilsammen:

$$(1+r_1)\cdot(1+r_2) = 1{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}77$$

Så relativ verdiendring for de to årene tilsammen er

$$0{,}77-1 = -0{,}23 = \underline{\underline{-23\%}}$$

Mønster Relative verdiendringer: $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gir den kombinerte relative verdiendringen

$$\underbrace{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot \ldots \cdot(1+r_n)}_{\text{vekstfaktor for den samlede endringen}} - 1$$

Eks  Innskudd : 50 000

Rente : $r = 4\%$ (årlig forrentning)

Etter 5 år er balansen

$$50\,000 \cdot (1+4\%)^5 = \underline{\underline{60\,832,65}}$$

Kalkulator : 50 000 $\boxed{\times}$ 1,04 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{=}$

Oppg  Innskudd : 50 000

Nominell rente: 4 %

Månedlig forrentning

a) Beregn balansen etter 5 år

b) Bestem den effektive renten

Løsning  Månedsrenten er $\frac{4\%}{12} = \frac{1}{3}\%$

a) Etter 5 år er balansen

$$50\,000 \cdot \left(1 + \frac{4\%}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{60}$$

$$= \underline{\underline{61049,83}}$$

b) Effektiv rente $r_{eff}$ = den årlige renten som gir den samme balansen

= den årlige relative verdiendringen

Den årlig vekstfaktoren er

$$1 + r_{eff} = \left(1 + \frac{4\%}{12}\right)^{12} = 1,040742$$

Så $r_{eff} = \underline{\underline{4,0742\ \%}}$

**Oppg** Etter 5 år med renter (årlig forrentning) har innskuddet på 50 000 vokst til 60 000. Beregn den effektive renten.

**Løsning** Den 5-årlige vekstfaktoren er

$$1 + \frac{60000 - 50000}{50000} = 1,2$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | år |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $50'$ | $50' \cdot g$ | $50' \cdot g^2$ | $50' \cdot g^3$ | $50' \cdot g^4$ | $50' \cdot g^5$ | saldo $= 60'$ |

$$50' \xrightarrow{\cdot g} 50' \cdot g \xrightarrow{\cdot g} 50' \cdot g^2 \xrightarrow{\cdot g} 50' \cdot g^3 \xrightarrow{\cdot g} 50' \cdot g^4 \xrightarrow{\cdot g} 50' \cdot g^5 = 60'$$

$$\underbrace{50' \longrightarrow 50' \cdot g^5}_{\cdot 1,2}$$

La $g$ være den årlige vekstfaktoren

Da vil $50000 \cdot g^5 = 60000$

så $g^5 = 1,2 \quad \left(= \frac{60000}{50000}\right)$

$$g = (g^5)^{\frac{1}{5}} = (1,2)^{\frac{1}{5}} \quad \left(= \sqrt[5]{1,2}\right)$$

$$= 1,2^{0,2} \quad \left(0,2 = \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1,03714$$

Så $\underline{\underline{r_{eff} = 3,714\ \%}}$

## 2. Den totale nåverdien til en kontantstrøm.

Nåverdien til et beløp (K) som betales n år fra nå med rente r
= hva du må sette på konto i dag ($K_0$) for at balansen skal være K om n år hvis renten er r

Fordi: $K_0 \cdot (1+r)^n = K$ så vil

den ukjente

$$K_0 = \frac{K}{(1+r)^n}$$ (nåverdien)

Eks 50000 (K) 3 år fra nå med 4 % rente har nåverdi

$$K_0 = \frac{50000}{1{,}04^3} = \underline{\underline{44\,449{,}82}}$$

---

Vi kan utvide dette til kontantstrømmer (flere betalinger etterhverandre)

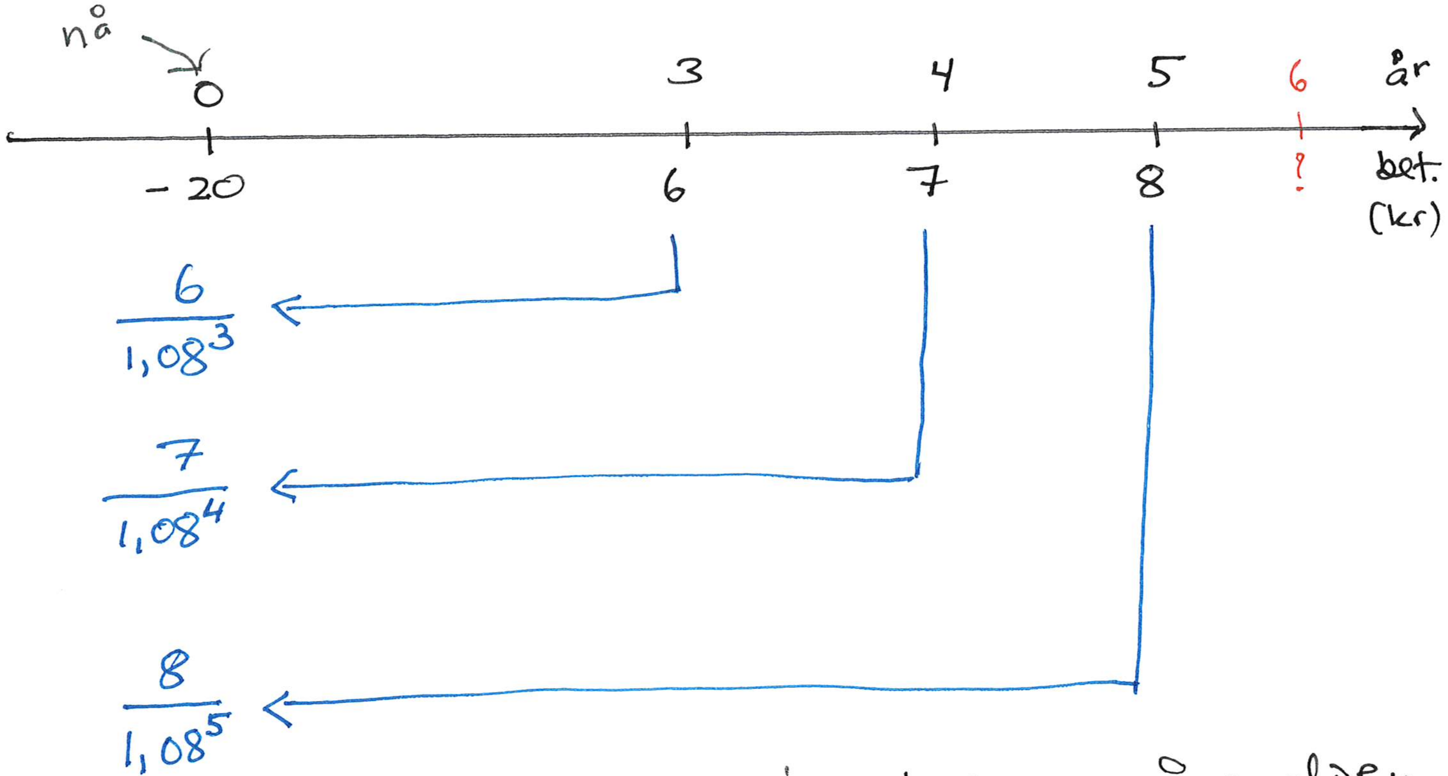
Eks Du betaler 20 mill. i dag, og får tilbake

6 mill. etter 3 år

7 mill etter 4 år

8 mill etter 5 år

Med 8% rente er (den totale) nåverdien av kontantstrømmen summen av nåverdiene til hver av betalingene




Summen av nåverdiene = den totale nåverdien til kontantstrømmen

$$= -20 + \frac{6}{1,08^3} + \frac{7}{1,08^4} + \frac{8}{1,08^5} = \underline{\underline{-4,65}}$$

(får ikke 8% avkastning på denne investeringen!)

Med disse tilbakebetalingene kan låntager få låne

15,35 mill

Evt. kan låntager betale ytterligere

$? = 4,65 \cdot 1,08^6$ mill ekstra etter 6 år

– Begge disse nye kontantstrømmene har nåverdi lik 0.

Internrenten til kontantstrømmen er den renten som gjør at nåverdien til kontantstrømmen blir 0.

Generelt vanskelig å beregne for hånd.

I dette eksempelet må vi løse likningen

$$f(x) = -20 + \frac{6}{(1+x)^3} + \frac{7}{(1+x)^4} + \frac{8}{(1+x)^5} = 0$$

(Svar : $x \approx 1,12\ \%$)