MET 1180, forelesning 32, 1. feb. 2024, Runar Ile

1. Systemer av lineære likninger
2. Matrisen til et lineært likningssystem
3. Gausseliminasjon

1. Systemer av lineære likninger.

EKS Hvilke tall x og y tilfredsstiller begge likningene?

– to påstander om x og y

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & (\text{I}) \\ 4x + 9y = 72 & (\text{II}) \end{cases}$$

x-er, y-er, konst.

– et system av lineære likninger (ingen $x \cdot y$, x^3, ...)

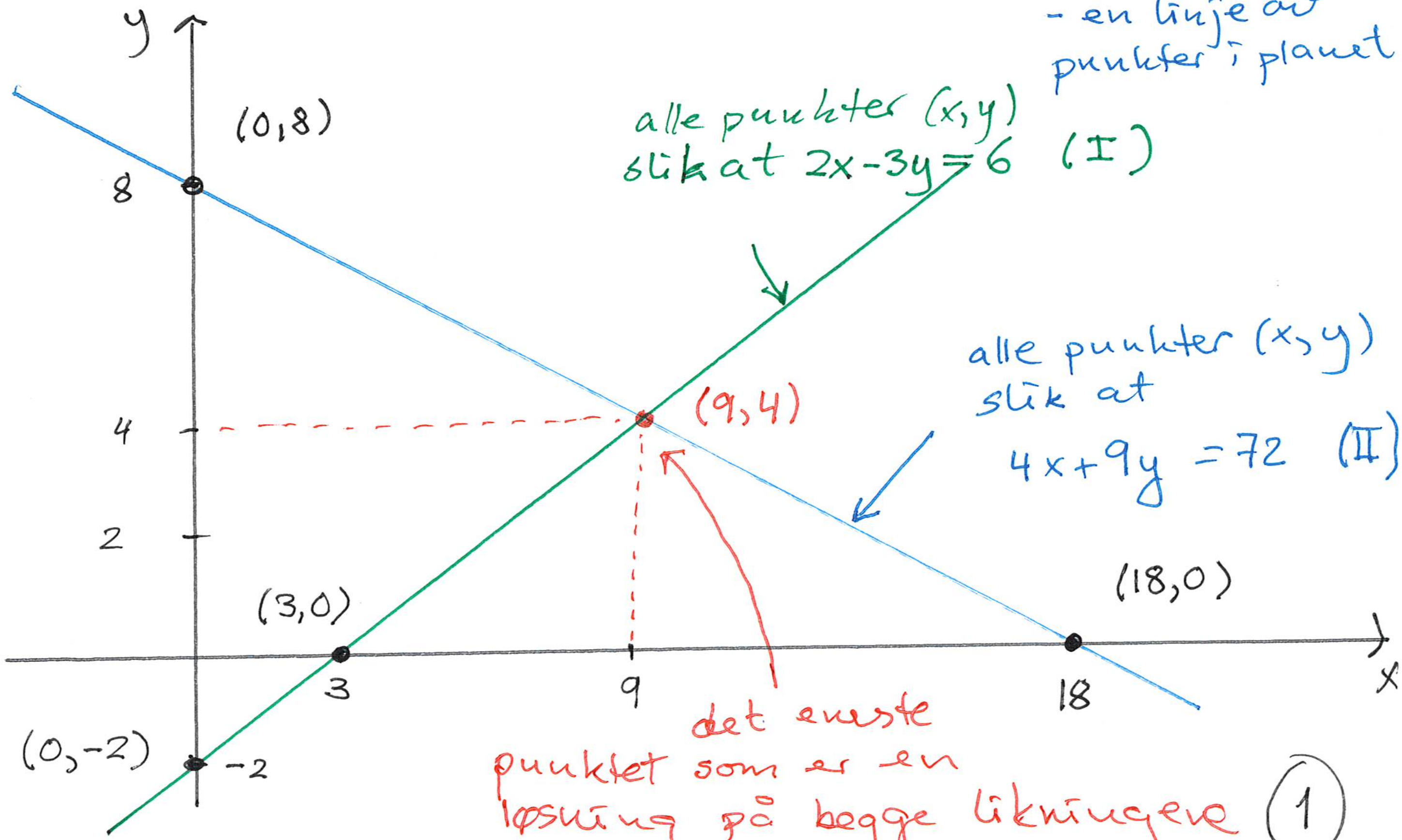
– likningssystemet er på standardform

Likning II

- Prøver $y = 0$, får $4x = 72$, dvs $x = \frac{72}{4} = 18$
  så $(x, y) = (18, 0)$ er en løsning på (II).
- Prøver $x = 0$, får $9y = 72$, dvs $y = \frac{72}{9} = 8$
  så $(x, y) = (0, 8)$ er en annen løsn. på (II).

Kan løse II for y: $9y = -4x + 72$ dvs $y = -\frac{4}{9}x + 8$

– en linje av punkter i planet



Likning I

- Prøver $y = 0$, får $2x = 6$, dvs $x = \frac{6}{2} = 3$
- Prøver $x = 0$, får $-3y = 6$, dvs $y = \frac{6}{-3} = -2$

Så $(3, 0)$ og $(0, -2)$ er løsninger på (I).

Løser $2x - 3y = 6$ for y og får

$$-3y = -2x + 6 \quad | : -3$$

$$\underline{y = \frac{2}{3}x - 2}$$

– løsningene er punktene på en linje.

Ikke lineære: $x^2 + y^2 = 10$

$x^2 + 3xy + z = 2$

Substitusjonsmetoden (kan også brukes på ikke-lin. syst.)

Vi bruker en av likn., f. eks. I: $2x - 3y = 6$ til å finne et uttrykk for x som bare inneholder y:

Fra I: $2x = 3y + 6 \quad | : 2$

$$x = \frac{3}{2}y + 3 \quad \text{(III)}$$

Erstatter x i (II) med dette uttrykket i y:

$$4\left(\frac{3}{2}y + 3\right) + 9y = 72$$

– én likning med én ukjent

Løser for y:

$$\frac{\cancel{4}^{2} \cdot 3y}{\cancel{2}} + 4 \cdot 3 + 9y = 72$$

$$6y + 12 + 9y = 72$$

$$15y = 60 \quad | \, 15$$

$$y = \frac{60}{15} = 4$$

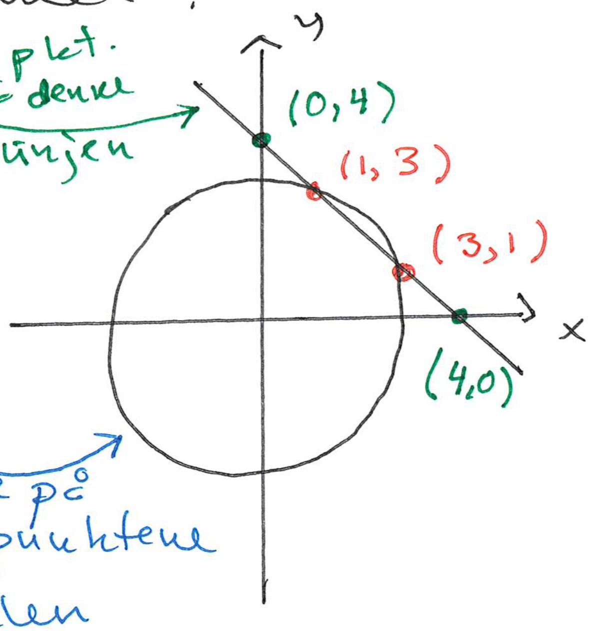
Setter $y = 4$ inn i (III):

$$x = \frac{3}{2} \cdot 4 + 3 = 9$$

Så $(x,y) = \underline{\underline{(9,4)}}$ er eneste løsning på likningssystemet.

løsn. er pkt. på denne linjen

Eks $\begin{cases} x+y=4 & (\mathrm{I}) \\ x^2+y^2=10 & (\mathrm{II}) \end{cases}$



løsningene på (II) er punktene på sirkelen med sentrum (0,0) og radius $\sqrt{10}$.

Kan løse systemet ved substitusjon.

(I): $y = 4-x$ (III)

innsatt i

(II): $x^2+(4-x)^2=10$

$x^2-4x=-3$

$(x-2)^2=-3+4=1 \qquad x=2\pm 1=\begin{cases}3\\1\end{cases}$

$x=3$ gir $y \overset{(\mathrm{III})}{=} 4-3=1$

$x=1$ gir $y=4-1=3$

så $\underline{\underline{(3,1)}}$ og $\underline{\underline{(1,3)}}$

Addisjonsmetoden

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x + 9y = 72 \end{cases}$

$$\overbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 6 \\ 4 & 9 & 72 \end{array}\right]}^{\text{koeffisient-matrisen}} \cdot 2$$

utvidet matrise

Multipliserer den første likningen med 2

2) $\begin{cases} 4x - 6y = 12 & (\text{I}) \\ 4x + 9y = 72 & (\text{II}) \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 12 \\ 4 & 9 & 72 \end{array}\right] -1\cdot$$

Trekker (I) fra (II)

3) $\begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ 15y = 60 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 12 \\ 0 & 15 & 60 \end{array}\right] : 15$$

Deler på 15 i andre likn.

4) $\begin{cases} 4x - 6y = 12 \\ y = 4 \end{cases}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]}_{\text{trappeform}} +6\cdot$$

Legger 6 ganger den andre til den første

5) $\begin{cases} 4x = 36 \\ y = 4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] : 4$$

Deler på 4 i den første

6) $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]}_{\text{redusert trappeform}}$$

Elementære radoperasjoner:

- bytte to rader
- mult./dividere en rad med tall $c \neq 0$
- legge til/trekke fra et multiplum av en rad til/fra en annen.

1) – 4): Gausseliminasjon

1) – 6): Gauss-Jordan eliminasjon

Start: 11.01

2. Matrisen til likningssystemet

Systemer av lineære likninger (på standardform!) kan skrives på en forenklet måte som en <u>matrise</u> av tall. Løser systemet ved å bruke elementære radoperasjoner til vi får en trappeform. Denne prosessen kalles Gausseliminasjon.

<u>Eks</u> (på hva vi gjør når vi har fått en trappeform)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{array}\right]$$ tilsvarer likningssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -13 & (\mathrm{I}) \\ \quad 3y + z = 8 & (\mathrm{II}) \\ \qquad 2z = -14 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

(III): $z = \frac{-14}{2} = \underline{-7}$ som settes inn i (II).

(II): $3y - 7 = 8$ dvs $3y = 15$ dvs $\underline{y = 5}$

Setter $z = -7$ og $y = 5$ inn i (I).

(I): $x + 2\cdot 5 + 3\cdot(-7) = -13$ dvs

$x + 10 - 21 = -13$ dvs $x = -10 + 21 - 13 = \underline{\underline{-2}}$

Så $(x, y, z) = \underline{\underline{(-2, 5, -7)}}$ er eneste løsning på likningssystemet.

3. Gausseliminasjon

Eks
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -13 \\ x + 5y + 4z = -5 \\ -x - 2y - z = -1 \end{cases}$$

tilsvarer matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -13 \\ 1 & 5 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad -1\cdot$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \quad +1\cdot$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \end{array}\right]$$

- en matrise på trappeform.

- Da oversetter vi tilbake til et (enklere) likningssystem
- løser dette ved substitusjon
- begynner med den siste likningen og arbeider oppover.

se forrige eksempel (samme matrise).

Eks $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+4z=7 \\ 2x+3y+5z=10 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

$-1\cdot$ $\quad -2\cdot$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-1\cdot$

– på trappeform (0-rader nederst)

Fordi vi ikke har pivot i 3. kolonne setter vi $\underline{\underline{z=t}}$ (en fri parameter)

tilsv. $\begin{cases} x+y+z=3 & (\mathrm{I}) \\ y+3z=4 & (\mathrm{II}) \\ 0x+0y+0z=0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$

Innsatt i (II): $y+3t=4$

$$\underline{\underline{y=4-3t}}$$

Innsatt i (I): $x+(4-3t)+t=3$

$$x=-(4-3t)-t+3$$

$$=\underline{\underline{-1+2t}}$$

$(x,y,z)=(-1+2t,\ 4-3t,\ t)$

for en fri parameter t (uendelig mange løsn.)