MET 1180, forelesning 33, 6. feb. 2024, Runar Ile

1. Repetisjon og oppgaveregning (oppg 8 og 7)
2. Frie variabler og antall løsninger

1. Repetisjon og oppgaveregning

Oppg 8
$$\begin{cases} 2xy + y^3 + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

Løser for én av variablene og setter inn i den ubrukte likningen.

Men først enkel faktorisering.

$$\begin{cases} y\cdot(2x + y^2 + y) = 0 & (\mathrm{I}) \\ x\cdot(x + 3y^2 + 2y) = 0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

I: Enten $y=0$ eller $2x+y^2+y=0$

og

II: Enten $x=0$ eller $x+3y^2+2y=0$

I utgangspunktet $2\cdot 2 = 4$ muligheter

(1) Anta $\underline{x \overset{(\mathrm{II})}{=} 0}$. Da er enten $\underline{y \overset{(\mathrm{I})}{=} 0}$

eller $y^2+y \overset{(\mathrm{I})}{=} 0$ dvs $y(y+1)=0$

dvs $\underline{y=0}$ el. $\underline{y=-1}$

Konkl: $(x,y) = \underline{\underline{(0,0)}}$ el $= \underline{\underline{(0,-1)}}$

(2) Anta $x+3y^2+2y \overset{(\mathrm{II})}{=} 0$, dvs $x = -3y^2-2y$

Da er enten $y \overset{(\mathrm{I})}{=} 0$ som gir $x = -3\cdot 0^2 - 2\cdot 0 = 0$

dvs $\underline{(0,0)}$.

Eller $2(-3y^2-2y)+y^2+y=0$ dvs

$$-6y^2-4y+y^2+y=0 \quad \text{dvs}$$

$$-5y^2-3y=0 \quad \text{dvs}$$

$$y\cdot(-5y-3)=0$$

Enten $\underline{y=0}$ el. $-5y-3=0$

dvs $\underline{y=-\frac{3}{5}}$

$y=0$ gir
$x=-3\cdot 0^2-2\cdot 0=0$
så $\underline{(0,0)}$

$y=-\frac{3}{5}$ gir
$$x=-3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$=-\frac{27}{25}+\frac{30}{25}=\frac{3}{25}$$
så $\underline{\left(\frac{3}{25},-\frac{3}{5}\right)}$

Konkl: $(x,y)=\underline{\underline{(0,0)}}$, $=\underline{\underline{(0,-1)}}$, $=\underline{\underline{\left(\frac{3}{25},-\frac{3}{5}\right)}}$

– innsettingsmetoden

Gausseliminasjon – bare for systemer av lineære likninger

① Skriv ned utvidet matrise $\left[\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}\right]$

② Bruker elementære radoperasjoner
(bytte om to rader, gange en rad med tall $c \neq 0$,
legge et multiplum av en rad til en annen)
til den nye matrisen er på trappeform
(0-rader nederst, hver pivot lengre til høyre enn pivotene over)

③ Oversett trappeformen til et likningssystem og løs nedenfra ved innsetting.

NB: Hver kolonne uten pivot gir tilsvarende fri variabel som settes lik en parameter

Oppg 7

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ x + 2y + 4z - w = 7 \\ x - y + z + 11w = 16 \end{cases}$$

koeffisientmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -1\cdot \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 11 & 16 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1\cdot \\ \\ \\ \end{array}$$

utvidet matrise

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 10 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +2\cdot \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

– trappeform

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ \quad y + 3z - 2w = -3 \\ \qquad 6z + 6w = 0 \end{cases}$$

1) $\underline{w = t}$ (fri parameter)

2) Fra $6z + 6w = 0$ får vi $6z = -6t$

$$\underline{z = -t}$$

3) Fra $y + 3z - 2w = -3$ får vi

$$y = -3(-t) + 2t - 3 = \underline{5t - 3}$$

4) Fra $x + y + z + w = 10$ får vi

$$x = -y - z - w + 10$$
$$= -(5t - 3) + t - t + 10$$
$$= \underline{13 - 5t}$$

$$(x, y, z, w) = (13-5t,\ 5t-3,\ -t,\ t)$$

for en fri parameter t

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konkl: Uendelig mange løsninger, én frihetsgrad (én parameter)

$\boxed{\text{Start: 11.03}}$

2. Frie variabler og antall løsninger

Resultat Ethvert lineært likningssystem har

enten
i) ingen løsninger — inkonsistent system
ii) én løsning (og ikke flere)
iii) uendelig mange løsninger

$\left.\begin{array}{l}\text{ii)}\\\text{iii)}\end{array}\right\}$ konsistent system

Merk:

i) pivot på HS av streken (i trappeformen)
$\iff$ ingen løsninger

ii - iii) ingen pivoter på HS av streken
$\iff$ det finnes løsninger

Da: a) Pivoter i alle kolonner på VS
$\iff$ akkurat én løsning

b) minst én kolonne på VS uten pivot $\Longleftrightarrow$ uendelig mange løsninger

Antall frihetsgrader = antall ulike parametere i løsningen
(i eks: 1 frihetsgrad)

= antall variabler − antall pivoter (i eks: $4-3=1$)

Eks
$$\begin{cases} x+y+z+w=17 \\ x-y+z=11 \\ 3x+y+3z+2w=49 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 49 \end{array}\right] \quad -1\cdot \quad 45$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 49 \end{array}\right] \quad -3\cdot \quad 45$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \quad -1\cdot \quad -6$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \quad 0 \qquad \begin{cases} x+y+z+w=17 \\ -2y-w=-6 \\ 0x+0y+0z+0w=4 \end{cases}$$

har ingen løsninger, og da har systemet ingen løsninger.

Med $3x + y + 3z + 2w = 45$ i stedet for likn 3.

får vi $\underline{w = t}$ (fri parameter)

$\underline{z = s}$ (en annen fri param.)

$-2y - t = -6$ så $\underline{y = -\frac{1}{2}t + 3}$

$x + y + z + w = 17$ tilsv.

$x - \frac{1}{2}t + 3 + s + t = 17$ som gir

$x = \underline{14 - \frac{1}{2}t - s}$ så

$$(x, y, z, w) = \underline{\underline{\left(14 - \frac{t}{2} - s,\ 3 - \frac{t}{2},\ s, t\right)}}$$

- uendelig mange løsninger,
- to frihetsgrader (to parametre)

$= 4 - 2 = 2.$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

Eks Hvor mange løsninger har systemet ?

$$\begin{cases} x + 2y - az = a-1 \\ ax + 2y - z = 3 \\ x + (a+1)y - z = 3 \end{cases}$$

Her er a en parameter. (ikke en ukjent)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & (a-1) \\ a & 2 & -1 & 3 \\ 1 & (a+1) & -1 & 3 \end{array}\right] \; -a\cdot$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & (a-1) \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & 3-a(a-1) \\ 1 & (a+1) & -1 & 3 \end{array}\right] \; -1\cdot$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & 3+a-a^2 \\ 0 & a-1 & a-1 & 4-a \end{array}\right] \; +\tfrac{1}{2}\cdot$$

$a \neq 1$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & 3+a-a^2 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{2}+a-\frac{3}{2} & \frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{11}{2} \end{array}\right] \cdot 2$$

$a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

– ingen løsninger.

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -a & a-1 \\ 0 & 2-2a & a^2-1 & 3+a-a^2 \\ 0 & 0 & \underbrace{a^2+2a-3}_{\underbrace{(a-1)}_{\neq 0}(a+3)} & a^2-a+11 \end{array}\right]$$

To muligheter :

$a \neq 3$: <u>én løsning</u>

$a = -3$: 5 på HS og 0 på VS så <u>ingen løsning</u>.