MET 1180, forelesning 35, 13. feb. 2024, Runar Ile

1. Repetisjon med oppgaveregning (5c, 6, 8, 7a)
2. Vektorer, vektorregning, vektorlikninger

1. Repetisjon

Oppg 5c

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} - 4 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(3 \cdot 6 - 4 \cdot 7)}_{\det(A)} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \det(A) \cdot \det(C).$$

Oppg 6 Gange en rad med $c \neq 0$.

Eks1: $$\begin{vmatrix} 7c & 6c \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7c \cdot 3 - 6c \cdot 2 = c \cdot (7 \cdot 3 - 6 \cdot 2) = c \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Eks2: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -ca_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + ca_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - ca_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= c \cdot \left(-a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \right)$$

$$= c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bytte om to rader: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 = -(a_1 a_4 - a_2 a_3)$$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

Legge et multiplum d av en rad til en annen rad:

$$\cdot d + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + d a_1 & b_2 + d a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot (b_2 + d a_2) - a_2 \cdot (b_1 + d a_1)$$

$$= a_1 \cdot b_2 + \cancel{d \cdot a_1 a_2} - a_2 b_1 - \cancel{d a_1 a_2}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Prøver også med (3×3):

$+d\cdot$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+da_1 & c_2+da_2 & c_3+da_3 \end{vmatrix}$$

$$= -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2+da_2 & c_3+da_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1+da_1 & c_3+da_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1+da_1 & c_2+da_2 \end{vmatrix}$$

fra (2×2)-tilfellet

$$= -b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Merk i) Hvis en rad (eller kolonne) bare har 0-er, så er determinanten lik 0.

ii) Hvis to rader er like, så er determinanten lik 0.

iii) Hvis en rad er et multiplum av en annen rad så er determinanten lik 0.

Start: 11.03

Oppg 8

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \end{array}\right]$$

homogent system betyr at konstantene $= 0$

– har alltid løsningen $x=0,\ y=0,\ z=0, \ldots$ osv.

Lager trappeform:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \end{array}\right]$$

Maks. tre pivoter. Da er det minst to fri variabler, dvs minst to parametere i løsningen, dvs minst to frihetsgrader

Oppg 7 (Cramers regel)

koeffisientmatrisen

a) $\begin{cases} x + ay = 3 \\ ax + 4y = 1 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{bmatrix}$ (2×2)

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 1 \cdot 4 - a \cdot a = 4 - a^2$

så likningen $\det(A) = 0$ dvs

$4 - a^2 = 0$

har løsninger $\underline{a = \pm 2}$. Hvis $a \neq \pm 2$

har likningssystemet akkurat én løsning.

Løsninger (når $\det(A) \neq 0$):

$$x = \frac{\det(A_x(\underline{b}))}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{4-a^2} = \underline{\underline{\frac{12-a}{4-a^2}}}$$

$$y = \frac{\det(A_y(\underline{b}))}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{4-a^2} = \underline{\underline{\frac{1-3a}{4-a^2}}}$$

2. Vektorer, vektorregning, vektorlikninger

En <u>vektor</u> er en matrise med én kolonne.

<u>Eks</u> $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -15 \end{bmatrix}$ er en 3-vektor.

Kan regne med vektorer av samme type
(f. eks. 3-vektorer, eller 2-vektorer, osv.)

i) Addisjon/subtraksjon : $\underline{u} + \underline{v}$

Eks: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 1-(-1) \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii) Skalarmultiplikasjon

r tall og $\underline{v}$ vektor

gir ny vektor $r \cdot \underline{v}$

av samme type.

$$\underbrace{2}_{\text{tall}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{2-vektor}} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\text{2-vektor}}$$

En <u>lineærkombinasjon</u> av n-vektorer $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ er et uttrykk på formen

$$\underbrace{c_1}_{\text{tall}} \cdot \underline{v}_1 + \underbrace{c_2}_{\text{tall}} \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \underbrace{c_m}_{\text{tall}} \cdot \underline{v}_m$$

Eks Avgjør om 2-vektoren $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, dvs

finnes det tall c_1 og c_2 slik at

$$c_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs $$\begin{bmatrix} 3c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_2 \\ 4c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs $$\begin{bmatrix} 3c_1 + 2c_2 \\ c_1 + 4c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs $$\begin{cases} 3c_1 + 2c_2 = 7 \\ c_1 + 4c_2 = 2 \end{cases}$$

Kan finne c_1 og c_2 ved å løse likningssystemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3\cdot \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -10 & 1 \end{array}\right]$$

Alternativ: Fordi $\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 12 - 2 = 10 \neq 0$ så har systemet en (entydig) løsning.

så $c_2 = \frac{1}{-10} = \underline{-0{,}1}$

og $c_1 + 4 \cdot (-0{,}1) = 2$

$c_1 = 2 + 0{,}4 = \underline{2{,}4}$

så $2{,}4 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 0{,}1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

så svaret er ja, $\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en lin. komb. av $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$