MET 1180, forelesning 37, 20. feb. 2024, Runar Ile

1. Repetisjon med oppgaver
2. Inverser til matriser

---

1. Repetisjon med oppgaver

Regneregler $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Eks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ (2×2), $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ (2×1)

Da er $AB = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-6) \\ -4 \cdot 1 + 5 \cdot (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ -34 \end{bmatrix}$ (2×1)

så $(AB)^T = \begin{bmatrix} -16 & -34 \end{bmatrix}$

HS: $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix}$ (1×2) og $A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (2×2)

Da er $B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 6 \cdot 3 & 1 \cdot (-4) - 6 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -34 \end{bmatrix}$
(1×2)

ser at $(AB)^T = B^T A^T$ i dette tilfellet.

For determinanten: $\det(A^T) = \det(A)$

Veldig viktig: $\det(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrise-mult.}}}{A \cdot B}) = \det(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mult. av tall}}}{\cdot} \det(B)$

Eks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Da er

$|A| = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$

$|B| = 7 \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) = -5$

$$AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 7 + 3\cdot(-2) & 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) \\ 4\cdot 7 + 5\cdot(-2) & 4\cdot 1 + 5\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 18 & -1 \end{bmatrix}$$

Da er $|AB| = 8\cdot(-1) - (-1)\cdot 18 = 10$

og $|A|\cdot|B| = (-2)\cdot(-5) = 10$ – så ok i dette tilfellet.

<u>Oppg 9b</u> La X være en ukjent (2×2)-matrise, f. eks. $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Løs likningen

$$X\cdot X = X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$ – har ingen løsninger

fordi $|VS| = |X^2| = |X|\cdot|X| = |X|^2 \geq 0$

mens $|HS| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 3\cdot 2 = -1 < 0$

<u>Oppg 8b</u> Anta A er en (2×3)-matrise.

Da er $\underset{(3\times 2)}{A^T}\ \underset{(2\times 3)}{A}$ definert og en (3×3)-matrise

og er en symmetrisk matrise fordi

$$(A^T\cdot A)^T \overset{\text{regne-regel}}{=} A^T\cdot(A^T)^T = A^T\cdot A$$

II all fid $(A^T)^T$

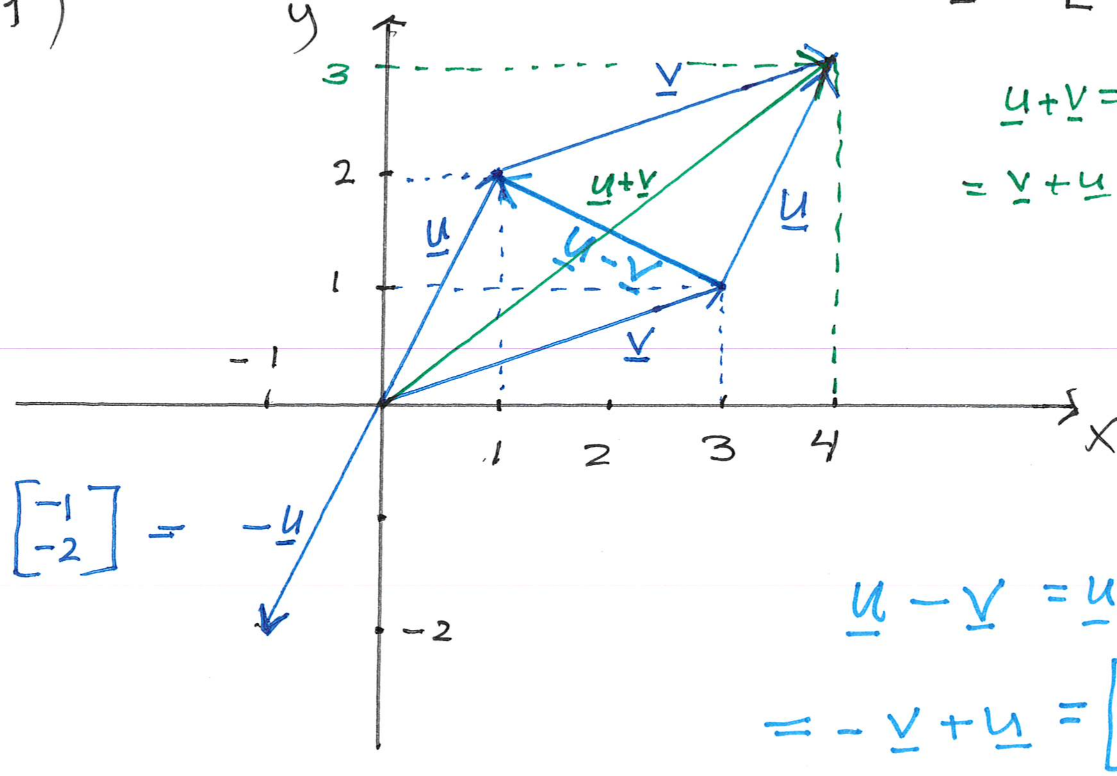
– transponering endrer altså ikke A^TA, derfor er A^TA symmetrisk

Vektorer i planet (geometri)

$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(Oppg 1)



$\underline{u}+\underline{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$= \underline{v}+\underline{u}$

$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -\underline{u}$

$\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-1)\cdot\underline{v}$

$= -\underline{v} + \underline{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|\underline{u}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

lengden til $\underline{u}$

start: 11.00

Oppg 7 Kjøper

		Tot. pris
x	antall A-verdipapirer, stk. pris 60	60x
y	—"— B —"— 75	75y
z	—"— C —"— 320	320z

a) Dermed er investert beløp

$60x + 75y + 320z$ og vi skal

investere 400.000 som gir HS av likn.

Avkastning = salgspris − kjøpspris

Tre mulige fremtidsscenarier (salgspriser)

	A	B	C
Scenario 1:	80	80	350

Som gir avkastning pr. aksje

	20	5	30

tot. avkastning

$$\begin{cases} 20x + 5y + 30z = R_1 \\ 40x - 50y + 180z = R_2 \\ -20x + 25y - 265z = R_3 \\ 60x + 75y + 320z = 400.000 \end{cases}$$

Scenario 2:

Scenario 3:

Tot. investering:

Lineært likningssystem med 4 likn. & 3 ukjente

Løser systemet (med gaussing) for generelle R_1, R_2, R_3 og ser:

Ender opp med trappeformen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 5 & 30 & R_1 \\ 0 & -60 & 120 & R_2 - 2R_1 \\ 0 & 0 & -175 & R_3 + \frac{1}{2} R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 400.000 - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3 \end{array}\right]$$

Systemet har løsning akkurat når
$400.000 - 5R_1 + 2R_2 + 2R_3 = 0$ dvs

$$5R_1 - 2R_2 - 2R_3 \overset{(*)}{=} 400.000$$

b) $(R_1, R_2, R_3) = (50', 25', -100')$

$VS = 5 \cdot 50' - 2 \cdot 25' - 2 \cdot (-100') = 400'$

$HS = 400'$, så dette gir løsninger for x, y og z. Kan løse de tre første likningene med disse verdiene for R_1, R_2 og R_3. Får

$\underline{\underline{x = 1187{,}5}}$, $\underline{\underline{y = 2250}}$, $\underline{\underline{z = 500}}$

c) Hva med $R_1 > 0$ og $R_2 = 0 = R_3$

Da gir (*) $5R_1 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 400'$

så $R_1 = \dfrac{400'}{5} = \underline{\underline{80'}}$

d) (*) gir betingelsen for mulige avkastninger. F. eks. kan alle være pos:

$\underline{R_1 = 400'}$, $\underline{R_2 = 400'}$, $\underline{R_3 = 400'}$

eller $\underline{R_1 = 580'}$, $\underline{R_2 = 500'}$, $\underline{R_3 = 750'}$

2. Inverser til matriser

Inversen til 2 er 0,5 fordi $2 \cdot \underbrace{0,5}_{2^{-1} = \frac{1}{2}} = 1$.

<u>Definisjon</u> Hvis A og B er $(n \times n)$-matriser med

$$AB = I = BA$$

$(n \times n)$ identitetsmatrisen $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

er B er inversmatrisen til A.

(Resultat: Hvis B finnes er den entydig)

Hvis A har en invers sier vi at A er <u>invertibel</u>.

<u>EKS</u> $\underset{(1\times 1)}{A = [a]}$ er invertibel hvis det finnes en $B = [b]$ (1×1) slik at $\underset{\substack{\| \\ [ab]}}{AB} = [1] = \underset{\substack{\| \\ [ba]}}{BA}$

Da må $a \neq 0$ og $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$.

<u>EKS</u> $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$ er invertibel fordi

$B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ er inversmatrisen:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA$$

Eks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ er invertibel fordi

$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ er inversmatrisen.

Sjekker $AB = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot(-5) & 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 3 + 3\cdot(-5) & 5\cdot(-1) + 3\cdot 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

også $BA = I$ (sjekk selv)

Oppg $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. Finn inversmatrisen B.