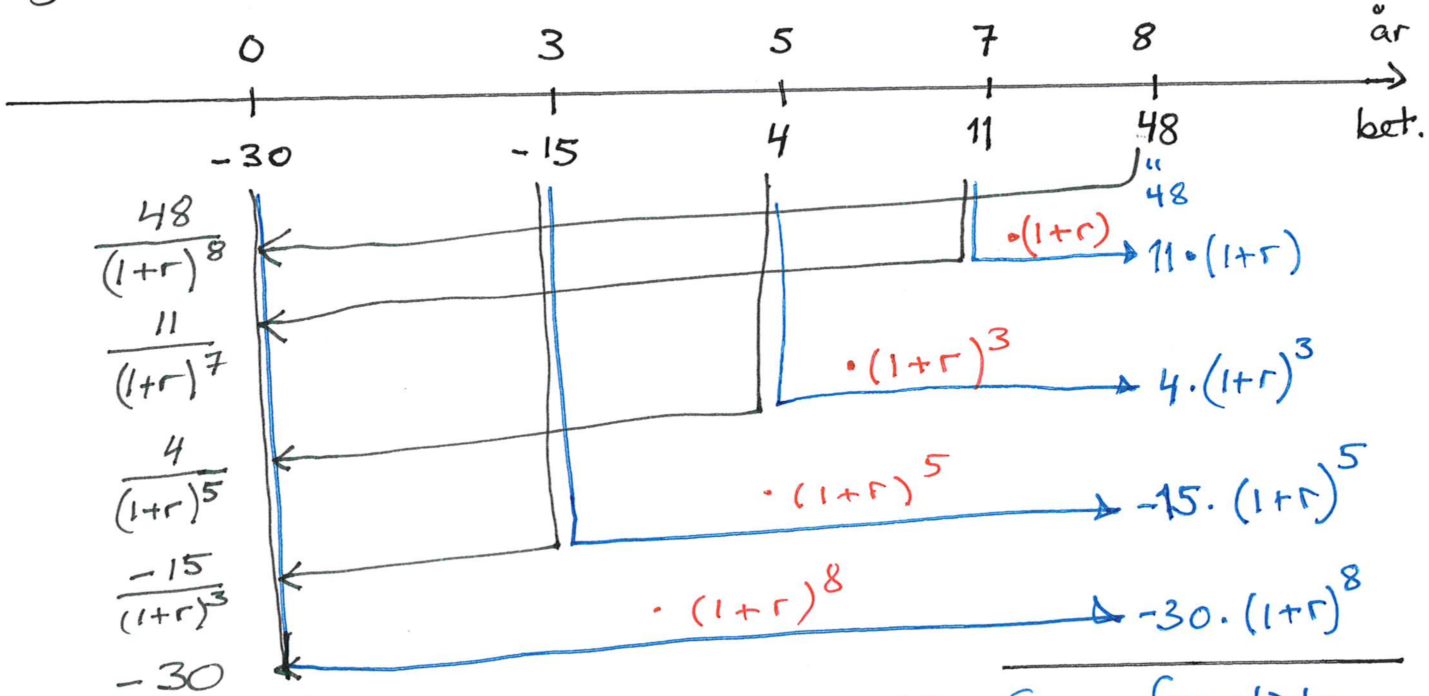
MET 1180, 4. forelesning, 5. sept. 2023, Runar Ile

Plan
1. Rep: Nåverdien av en kontantstrøm
2. Geometriske rekker
3. Annuiteter

## 1. Rep: Nåverdien av en kontantstrøm

Oppg 8 La $r$ være (diskonterings)renten. Kontantstrømmen:




$K_0$ = Sum = nåverdien til kontantstrømmen

$K_8$ = Sum = fremtidsverdien av kontantstrømmen om 8 år med rente $r$.

b) Med $r = 9\%$ er nåverdien $= \underline{\underline{-8{,}88}}$

a) Med $r = 9\%$ er fremtidsverdien $= \underline{\underline{-17{,}69}}$

d) Med $r = 13\%$ er nåverdien $= \underline{\underline{-15{,}49}}$

c) Med $r = 13\%$ er fremtidsverdien $= \underline{\underline{-41{,}19}}$

Observasjon $\underbrace{-8{,}88}_{=K_0} \cdot (1+9\%)^8 \overset{\text{regner}}{=} \underbrace{-17{,}69}_{=K_8}$

$K_0 = -15{,}49 \cdot (1+13\%)^8 \overset{\text{regner}}{=} -41{,}18 \approx K_8$

Forklaring: Vi regner ut

$$K_0 \cdot (1+r)^8 = \left[-30 - \frac{15}{(1+r)^3} + \frac{4}{(1+r)^5} + \frac{11}{(1+r)^7} + \frac{48}{(1+r)^8}\right] \cdot (1+r)^8$$

$$= -30 \cdot (1+r)^8 - 15 \cdot (1+r)^5 + 4 \cdot (1+r)^3 + 11 \cdot (1+r) + 48$$

$$= K_8 \quad \text{(fremtidsverdien)}$$

---

Oppg Hvordan må utbetalingen i dag (−30) endres slik at internrenten til (den nye) kontantstrømmen blir

i) 9 % ? Bet. i dag: $-30 + 8{,}88 = \underline{\underline{-21{,}12}}$

ii) 13 % ? Bet. i dag $-30 + 15{,}49 = \underline{\underline{-14{,}51}}$

Hvordan må betalingen om 8 år (48) endres slik at fremtidsverdien om 8 år til (den nye) kontantstrømmen blir 0 hvis renten er

iii) 9% ? $48 + 17{,}69 = \underline{\underline{65{,}69}}$

iv) 13% ? $48 + 41{,}19 = \underline{\underline{89{,}19}}$

Hvordan endrer vi betalingen om 3 år (−15) slik at nåverdien til k.strømmen blir 0 med

v) 9% ? $-15 + 8{,}88 \cdot 1{,}09^3 = \underline{\underline{-3{,}50}}$

vi) 13% ? $-15 + 15{,}49 \cdot 1{,}13^3 = \underline{7{,}49}$

Start: 15.00

## 2. Geometriske rekker

En rekke er en (lang) sum av tall.

**Eks** $1 + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{9}}_{=\text{tredje ledd}} + \dots + \frac{1}{100}$ er en rekke

med 10 ledd.

Vi skriver $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$

Geometriske rekker: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$

der hvert ledd er k ganger det foregående leddet (k er et fast tall)

$$a_2 = k \cdot a_1$$
$$a_3 = k \cdot a_2 = k \cdot (k \cdot a_1) = k^2 \cdot a_1$$
$$a_4 = k \cdot a_3 = k \cdot (k^2 \cdot a_1) = k^3 \cdot a_1$$
$$\vdots$$
$$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$$

Vi kan finne et (kort) uttrykk for denne summen:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + k \cdot a_1 + k^2 \cdot a_1 + k^3 \cdot a_1 + \dots + k^{n-1} \cdot a_1$$
$$= a_1 (\underbrace{1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^{n-1}}_{\frac{k^n - 1}{k - 1}})$$

antall ledd i rekken

$$= a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

det første leddet

„multiplikatoren" (vekstfaktor)

<u>Oppg</u> Beregn summen

$$5 + 5\cdot 1{,}003 + 5\cdot 1{,}003^2 + 5\cdot 1{,}003^3 + \dots + 5\cdot 1{,}003^{60}$$

<u>Løsning</u> Dette er en geometrisk rekke med

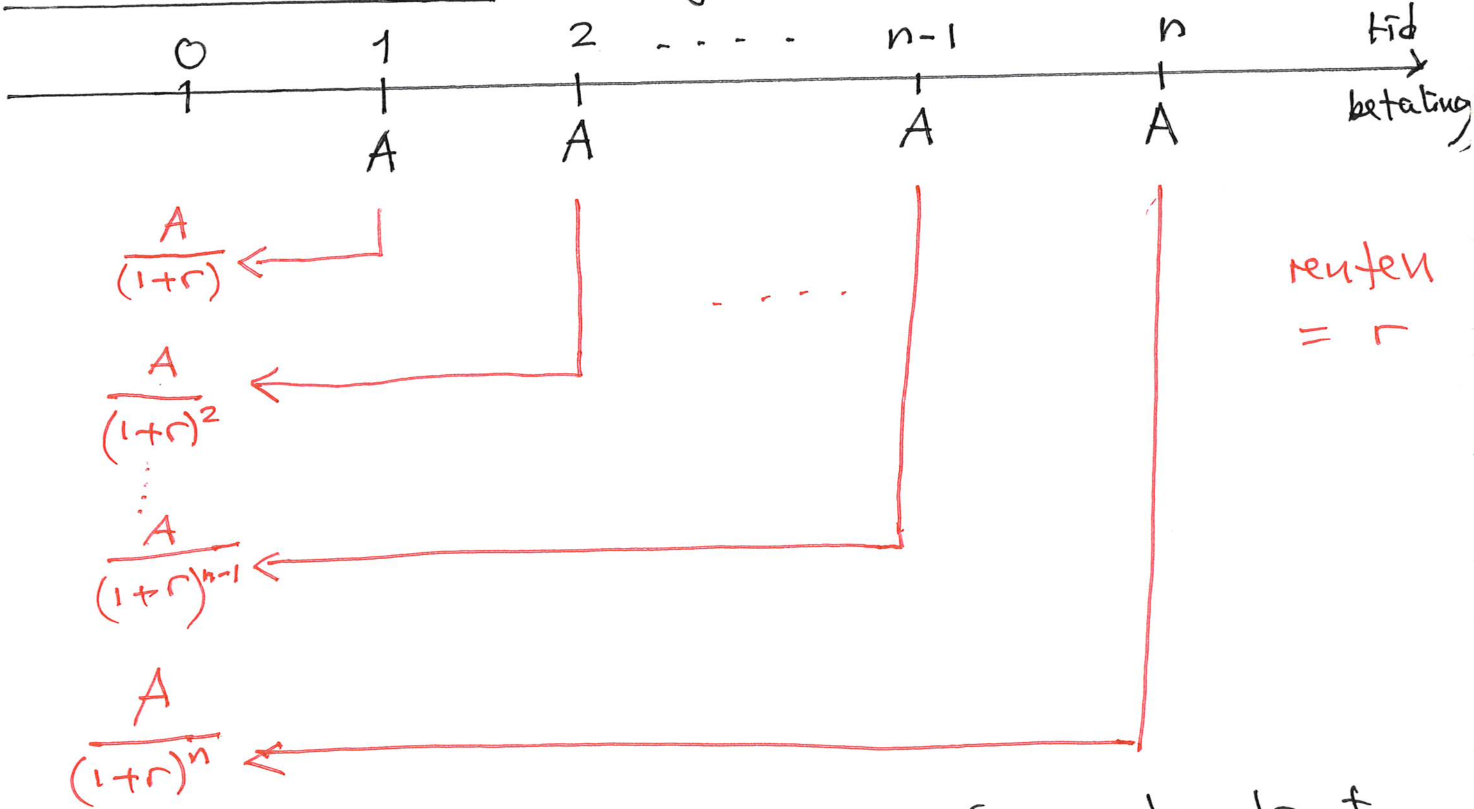
$a_1 = 5$, $k = 1{,}003$ og $n = 61$

Da er summen $5\cdot\dfrac{1{,}003^{61}-1}{1{,}003-1} = 5\cdot\dfrac{1{,}003^{61}-1}{0{,}003}$

$$= \underline{\underline{334{,}14}}$$

---

## <u>3. Annuiteter</u> – jevne kontantstrømmer




renten $= r$

---

Summen er nåverdien til den jevne kontantstrømmen. Dette er geom. rekke med

$a_1 = \dfrac{A}{(1+r)}$, ant. ledd $= n$, $k = \dfrac{1}{(1+r)}$

Da er summen $\dfrac{A}{(1+r)}\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{1+r}\right) - 1}$ – ikke så pen brøk!

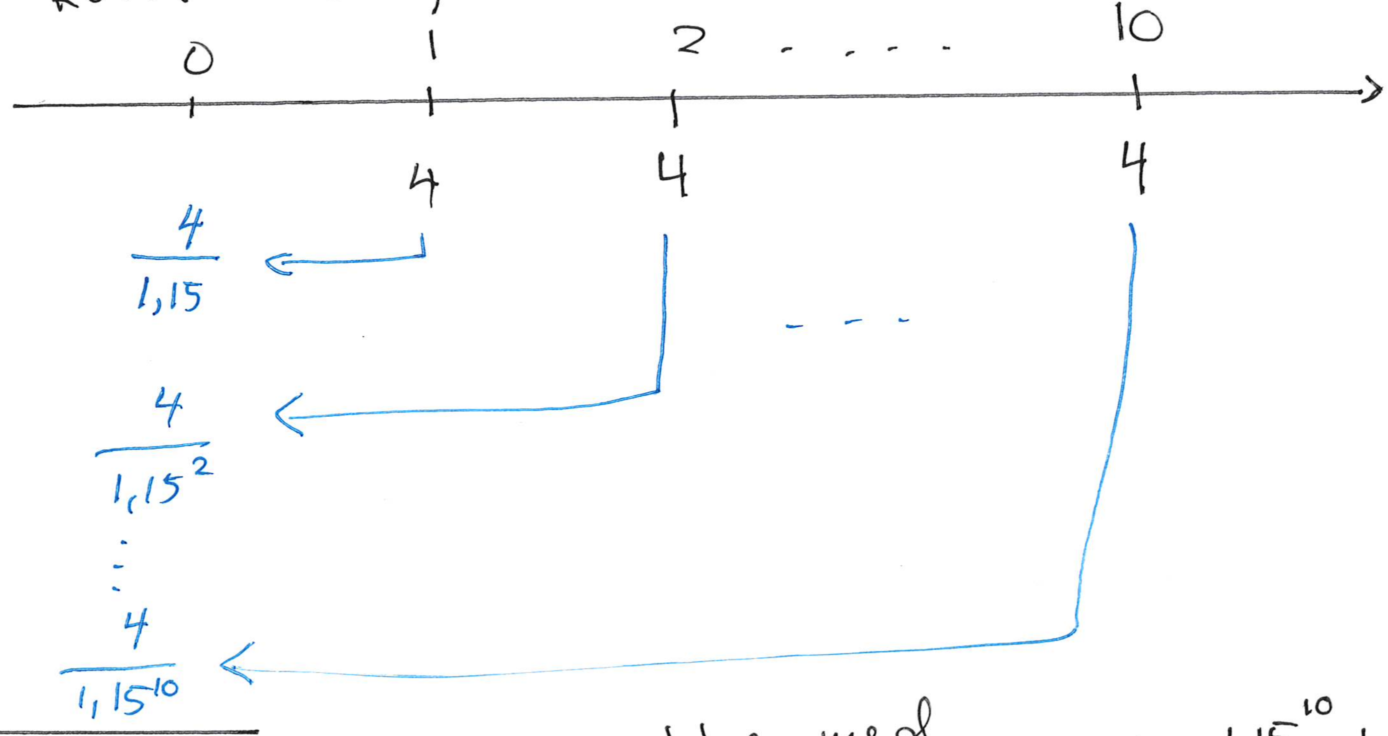
Men summen er også en geom. rekke den andre veien. Da er

$a_1 = \frac{A}{(1+r)^n}$, n ledd, $k = 1+r$

Summen er da $\frac{A}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ – enklere å taste på kalk.

<u>Eks</u> Hege vurderer en investering som skal gi utbetalinger på 4 mill hvert år i 10 år, med første utb. om 1 år. Anta diskonteringsrenten er 15 %. Hva er en fair pris for denne investeringen?

Løsning: Fair pris = nåverdien av kontantstrømmen:




Summen er en geom. rekke med $a_1 = \frac{4}{1{,}15^{10}}$, $k = 1{,}15$, $n = 10$ så summen er $\frac{4}{1{,}15^{10}} \cdot \frac{1{,}15^{10} - 1}{0{,}15}$

$= \underline{\underline{20{,}08}}$