MET 1180, forelesning 40, 29. feb. 2024, Runar Ile

1. Partiell derivasjon og stigningstall
2. Stasjonære punkter til funksjoner i to variabler
3. Minimumspunkter, maksimumspunkter, salpunkter

---

1. Partiell derivasjon og stigningstall

En funksjon $f(x,y)$ i to variabler kan deriveres i to retninger:

– Med hensyn på x og m.h.p. y.

Eks $f(x,y) = 2x + 3y^2$

Da vil $f(5,1) = 2\cdot 5 + 3\cdot 1^2 = \underline{13}$

Hva skjer med funksjonsverdien hvis x øker litt?

$$f(5+1,1) = f(6,1) = 2\cdot 6 + 3\cdot 1^2 = \underline{15}$$

Økningen: $f(6,1) - f(5,1) = 15 - 13 = \underline{2}$

Deriverer f m.h.p. x

$$f'_x(x,y) = (2x+3y^2)'_x = (2x)'_x + (3y^2)'_x$$

$$= 2 + 0 = \underline{2}$$

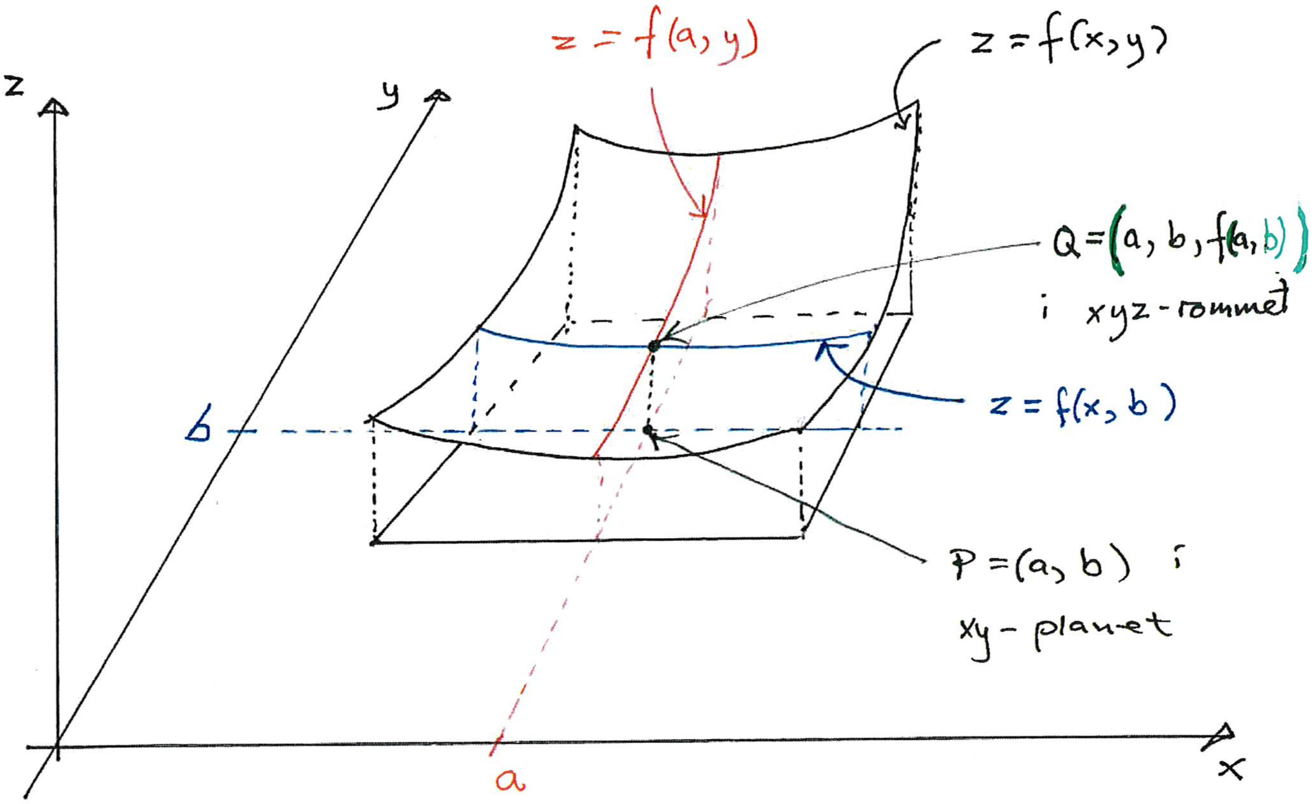
Deriverer f m.h.p. y

$$f'_y(x,y) = (2x+3y^2)'_y = (2x)'_y + (3y^2)'_y = 0 + 6y$$

$$= 6y \quad \text{(ikke konstant)}$$

For $(x,y) = (5,1)$ får vi

$$f'_y(5,1) = 6\cdot 1 = 6$$



z = f(a, y)
z = f(x, y)
z
y
Q = (a, b, f(a, b))
i xyz-rommet
z = f(x, b)
b
P = (a, b) i
xy - planet
a
x

Øker y med $0{,}1$.

Får $f(5, 1+0{,}1) = f(5, 1{,}1) = 2\cdot 5 + 3\cdot(1{,}1)^2$

$= 10 + 3\cdot 1{,}21 = \underline{13{,}63}$

Endringen $13{,}63 - 13 = \underline{0{,}63}$

Dette er nesten det samme som $6\cdot 0{,}1 = \underline{0{,}60}$

Ser på grafen til en funksjon $f(x,y)$.
[se figur]

- Stigningstallet til tangenten til den blå kurven i Q er $f'_x(a,b) = \big(f(x,b)\big)'_x(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{a}})$

- Stigningstallet til tangenten til den røde kurven i Q er $f'_y(a,b) = \big(f(a,y)\big)'_y(\overset{y}{\overset{\shortparallel}{b}})$

Begge disse stigningstallene er lik 0
bunnpunkt
hvis Q er et minimumspunkt eller
toppunkt.
et maksimumspunkt.

2. Stasjonære punkter til funksjoner i to variabler

Definisjon Et punkt $P=(a,b)$ i xy-planet er et stasjonært punkt for $f(x,y)$ hvis $f'_x(a,b)=0$ og $f'_y(a,b)=0$

Mål Finne P slik at $f(P)$ er maks. eller min. for $f(x,y)$.

Eks Bestem stasjøære punkter for

$$f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 4x + 30y - 49$$

Plan ① Beregner f'_x og f'_y.

② Løser likningssystemet $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

Start: 11.00

Gjennomføring

① $f'_x(x,y) = (-x^2)'_x - (5y^2)'_x + (4x)'_x + (30y)'_x - (49)'_x$

$= -2x - 0 + 4 + 0 - 0 = \underline{-2x+4}$

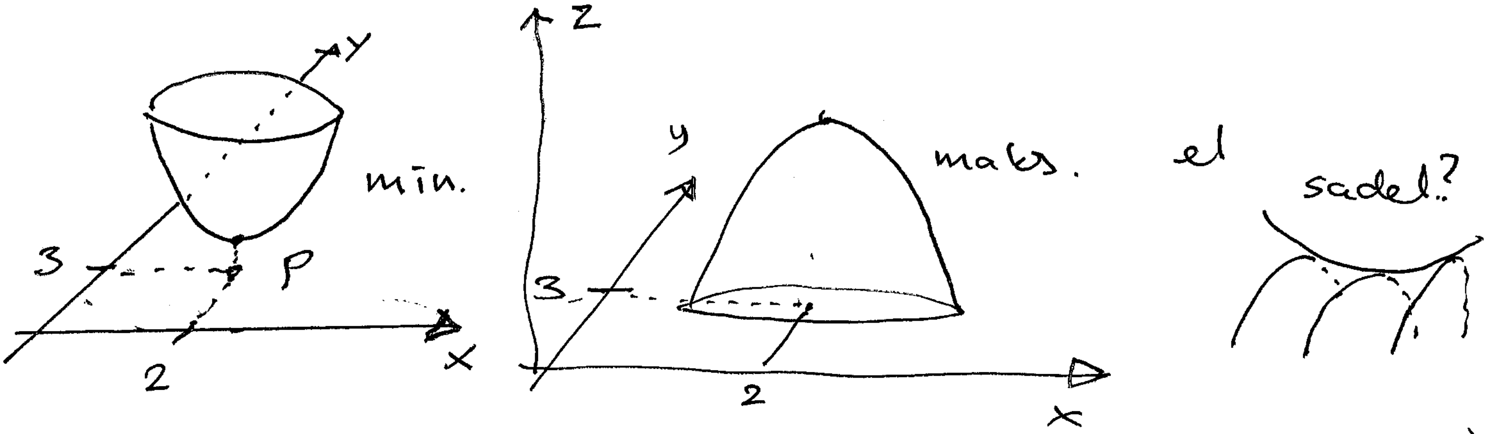
$f'_y(x,y) = (-x^2)'_y - (5y^2)'_y + (4x)'_y + (30y)'_y - (49)'_y$

$= 0 - 10y + 0 + 30 - 0 = \underline{-10y+30}$

② Løser $\begin{cases} -2x + 4 = 0 \\ -10y + 30 = 0 \end{cases}$ dvs $\begin{cases} -2x = -4 \\ -10y = -30 \end{cases}$

dvs $\begin{cases} x = \frac{-4}{-2} = 2 \\ y = \frac{-30}{-10} = 3 \end{cases}$ dvs $\underline{(x,y) = (2,3)}$ $(=P)$ er eneste stasjonære punkt for $f(x,y)$.

Men er $P = (2,3)$ et maks. el. min. punkt?



(– og er det globale el. bare lokale maks/min?)

<u>Resultat</u> Hvis (a, b) er et maks. el. min. pkt. for $f(x, y)$ er <u>enten</u> (a, b) et stasjonært punkt <u>eller</u> et punkt på kanten av definisjonsområdet.

---

3. Klassifikasjon av stasjonære punkter

– er et stasjonært punkt lok. maks. el. lok. min, eller ingen av delene

Anta (a, b) er et stasj. punkt for $f(x, y)$

Dvs. $f'_x(a,b) = 0$ og $f'_y(a,b) = 0$

Setter

$$A = f''_{xx}(a,b)$$

$$B = f''_{xy}(a,b)$$

$$C = f''_{yy}(a,b)$$

Hessematrisen

$$H(f) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

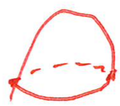
NB: $(f'_y)'_x = f''_{yx} = f''_{xy}$ („alltid")

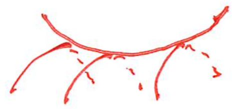
$$H(f)(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Andrederiverttesten (to variabler)

Anta (a,b) er stasj. pkt. for $f(x,y)$.

1) Hvis $\det H(a,b) = AC - B^2 > 0$ og $A > 0$ 
så er (a,b) et (lok.) minimumspkt.

2) Hvis $\det H(a,b) = AC - B^2 > 0$ og $A < 0$
så er (a,b) et (lok.) maks.pkt. 

3) Hvis $\det H(a,b) = AC - B^2 < 0$ så er (a,b)

et salpunkt.

4) Hvis $\det H(a,b) = AC - B^2 = 0$ har
testen ingen konklusjon (alt er mulig).

<u>Eks</u> $f(x,y) = 5x^2 + 3xy^2 + y^2 - 13x - 8y$

a) Forklar hvorfor $(x,y) = (1,1)$ er et stasjonært pkt. for $f(x,y)$.

b) Klassifisér det stasj. punktet $(1,1)$ som maks., min. eller salpunkt.

<u>Løsning</u> a) $f'_x(x,y) = 10x + 3y^2 - 13$

$$f'_y(x,y) = 6xy + 2y - 8$$

Da er $f'_x(1,1) = 10 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 13 = 10 + 3 - 13 = 0$

$$f'_y(1,1) = 6 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 8 = 6 + 2 - 8 = 0$$

Altså er $(1, 1)$ et stasjonært punkt for $f(x, y)$.

b) Bruker andrederiverttesten

$f''_{xx}(x, y) = 10$

$f''_{xy}(x, y) = 6y$ setter inn $(1, 1)$

$f''_{yy}(x, y) = 6x + 2$

$\underline{A = 10}$

$\underline{B} = 6 \cdot 1 = \underline{6}$

$\underline{C} = 6 \cdot 1 + 2 = \underline{8}$

Da er $AC - B^2 = 10 \cdot 8 - 6^2 = 80 - 36 = 44 > 0$

Dessuten er $A = 10 > 0$ og da er $(1, 1)$ et (lok.) minimumspunkt for $f(x, y)$.