MET1180, forelesning 41, 5. mars 2024, Runar Ile

1. Repetisjon m. oppgaver.
2. Tangenten til en nivåkurve
3. Gradienten

1. Repetisjon

Oppg. 1d $f(x,y) = 17 \cdot x^{1,2} \cdot y^{3,4}$

$$= 17 \cdot x \cdot \sqrt[5]{x} \cdot y^3 \cdot \sqrt[5]{y^2}$$

f.eks. $f(-1,1) = 17(-1) \cdot \sqrt[5]{-1} \cdot 1^3 \cdot \sqrt[5]{1^2}$

$$= 17 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 = 17$$

Men $f(x,y) = 17 \cdot x^{\frac{6}{5}} \cdot y^{\frac{17}{5}}$

$$= 17 \cdot x^{\frac{12}{10}} \cdot y^{\frac{34}{10}}$$

Da blir $f(-1,1) = 17 \cdot \underbrace{\left(\sqrt[10]{-1}\right)}_{\text{ikke definert}}^{12} \cdot \left(\sqrt[10]{1}\right)^{34}$

$$(-1)^{\frac{12}{10}} = \left((-1)^{12}\right)^{\frac{1}{10}} = 1^{\frac{1}{10}} = 1$$

Når eksponentene ikke er heltall må grunntallene være større eller lik 0.

D_f = alle par av tall (x,y) hvor både x og y er større eller lik 0.

$V_f = [0, \rightarrow\rangle$ (kan sette $y=1$ og løse lign. $17x^{1,2} = c$ for $c \geq 0$)

<u>oppg 7g</u> $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 3$

$f'_x = 2xy^2 - 2x = 2x(y^2-1)$

$f'_y = x^2 \cdot 2y - 2y = 2y(x^2-1)$

Stasj. pkt er løsningene på systemet

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 2x\cdot(y^2-1) = 0 & (1) \\ 2y\cdot(x^2-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

Enten $x = 0$ eller $y = \pm 1$ (1)

og

Enten $y = 0$ eller $x = \pm 1$ (2)

Stasj. pkt: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$
$(-1,1)$, $(-1,-1)$

Klassifiserer disse.

$$H(f) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2-2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2-2 \end{bmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 2\cdot0^2-2 & 4\cdot0\cdot0 \\ 2\cdot0\cdot0 & 2\cdot0^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$AC-B^2 = \det = (-2)\cdot(-2) - 0\cdot0 = 4 > 0$ og

$A = f''_{xx}(0,0) = -2 < 0$ (konkav i x-retn.)

Så: $(0,0)$ er et lok. maks. punkt.

osv.

Oppg 8a $f(x,y) = xy(x^2-y^2) = x^3y - xy^3$

$f'_x = 3x^2y - y^3 = y(3x^2-y^2)$

$f'_y = x^3 - 3xy^2 = x(x^2-3y^2)$

Eneste stasjonære (etter litt jobb) er $(0,0)$.

$$H(f) = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2-3y^2 \\ 3x^2-3y^2 & -6xy \end{bmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ så $\det = AC - B^2 = 0$

så andrederiverttesten gir ikke svar.

Alternativ:
Prøver med linjer gjennom det stasjonære punktet:

$y = 2x$: $f(x,2x) = 2x^2(x^2-(2x)^2)$
$= 2x^2(-3x^2) = -6x^4$

og $f(x,2x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$

$y = \frac{1}{2}x$: $f(x,\frac{1}{2}x) = x \cdot \frac{1}{2}x \cdot (x^2 - (\frac{1}{2}x)^2)$
$= \frac{1}{2}x^2 \cdot (\frac{3}{4}x^2)$.
$= \frac{3}{8}x^4$

og $f(x,\frac{1}{2}x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$

Derfor er $(0,0)$ et salpunkt.

2. Tangentene til en nivåkurve

$f(x,y) = c$ (en likning)

implisitt derivasjon (tenker at $y = y(x)$)

gir faktisk $f'_x + f'_y \cdot y' = 0$ (en likn.)

som gir $$\boxed{y' = -\frac{f'_x}{f'_y}}$$ partiellderiverte

$y = y(x)$
derivert (implisitt)
m.h.p. x.

Eks $xy = 10$ (så $f(x,y) = xy$ og $c = 10$)

Da er $(x \cdot y)' = 0$ og ved implisitt derivasjon og produktregelen først

dvs $\underbrace{1 \cdot y}_{f'_x} + \underbrace{x}_{f'_y} \cdot y' = 0$ (*)

NB: f'_x og f'_y så venstresiden er $f'_x + f'_y \cdot y'$

Fra (*): $y' = \frac{-y}{x}$ $\left(= -\frac{f'_x}{f'_y}\right)$

Start: 11.02

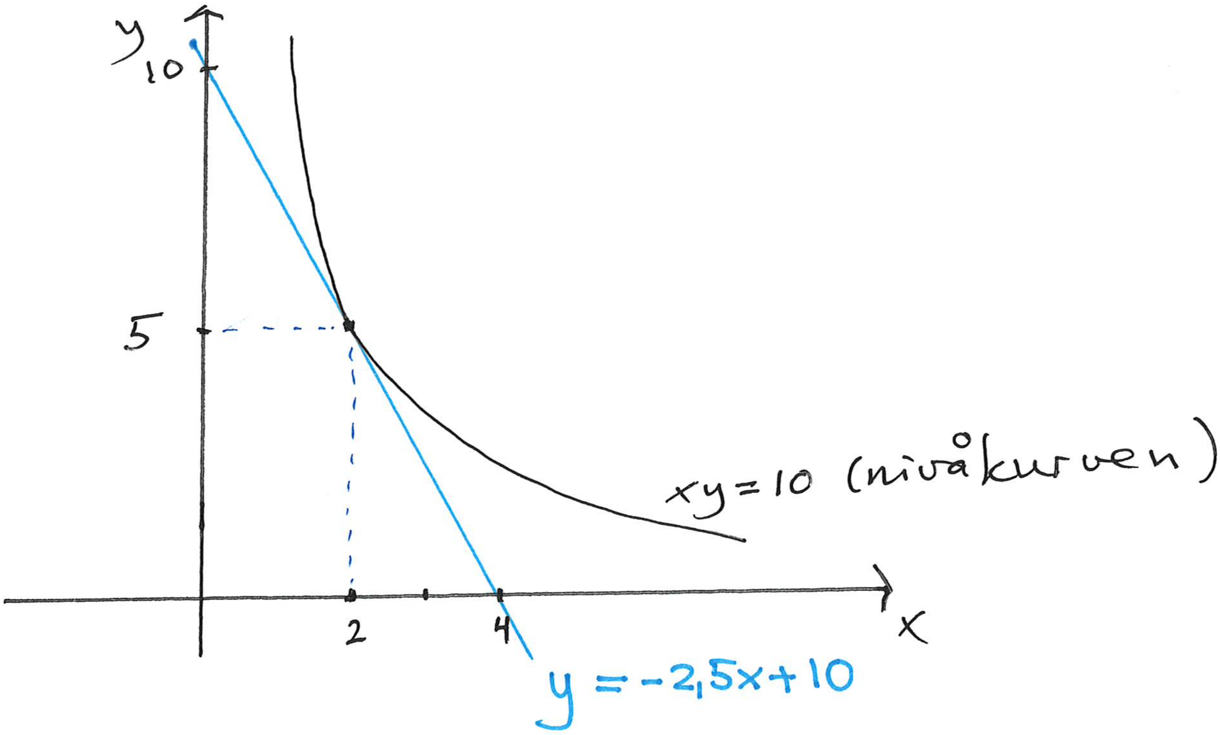
Hvis (f.eks.) $x = 2$, da er $y = \frac{10}{2} = 5$

$(2,5)$: $y' = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

Ettpunktsformelen gir tangentlinjelikningen:

$y - 5 = -2{,}5 \cdot (x - 2)$

dvs $y = -2{,}5x + 10$



<u>Eks</u> $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

Nivåkurve med høyde c er løsningene på likningen $f(x,y) = c$

dvs $x^2 - 2x + 4y^2 = c$

Fullfører kvadratet i x :

$$(x-1)^2 + 4y^2 = c+1$$

Hvis $c < -1$ har likn. ingen løsninger.

Hvis $c = -1$ er nivåkurven bare et punkt $(1,0)$ fordi $HS = 0$.

Altså er $(1,0)$ et <u>globalt minimumspunkt</u> med <u>minimumsverdi</u> -1 for $f(x,y)$.

Hvis $c > -1$ kan vi dele på $c+1$ på BS:

$$\frac{(x-1)^2}{c+1} + \frac{4y^2}{c+1} = 1$$

NB: $\frac{4y^2}{c+1} = \frac{4y^2 : 4}{(c+1):4} = \frac{y^2}{\left(\frac{c+1}{4}\right)}$

så $\frac{(x-1)^2}{(c+1)} + \frac{y^2}{\left(\frac{c+1}{4}\right)} = 1$ er std. form

for likningen til en ellipse med

sentrum $= (1,0)$ og

horisontal halvakse $a = \sqrt{c+1}$ og

vertikal —"— $b = \sqrt{\left(\frac{c+1}{4}\right)} = \frac{\sqrt{c+1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{c+1}$

Hvilken nivåkurve ligger $(2,1)$ på?

$f(2,1) = 2^2 - 2\cdot 2 + 4\cdot 1^2 = 4 \quad (=c)$

Hva er tangentlinjen til nivåkurven i dette punktet?

Implisitt derivasjon av $f(x,y) = c$ gir

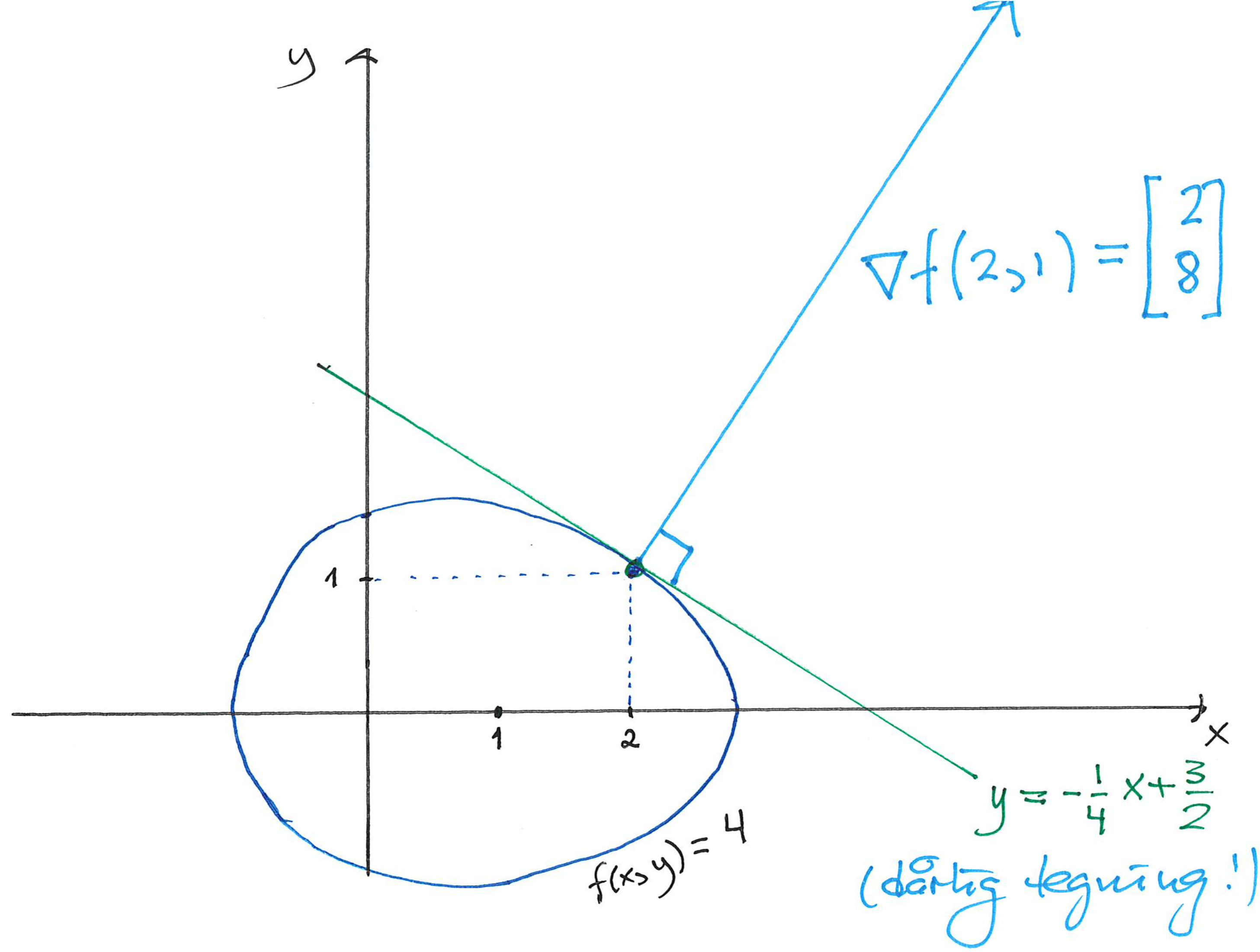
$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x-2}{8y}$$

$(2,1)$: $\quad y' = -\frac{2\cdot 2-2}{8\cdot 1} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} = -0{,}25$

Ettpunktsformelen:

$y - 1 = -\frac{1}{4}(x-2)$ dvs $\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}}$

$= \underline{\underline{-0{,}25x + 1{,}5}}$



3. Gradienten Har $f(x,y)$, får $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$

Eks: $f(x,y) = x^2 - 2x + 4y^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-2 \\ 8y \end{bmatrix} \quad \text{- en 2-vektor}$$

$$\nabla f(2,1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$ - stigningstallet til denne vektoren er $\frac{8}{2} = 4$

$= -(\text{stigningstallet til tangenten})^{-1}$

$= -\frac{1}{4}$. Betyr at gradienten $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ er normal (vinkelrett) på tangenten

Alltid: (1) Gradienten er normal på tangenten.

(2) Gradienten peker i den retningen hvor funksjons-verdien til $f(x, y)$ øker raskest.