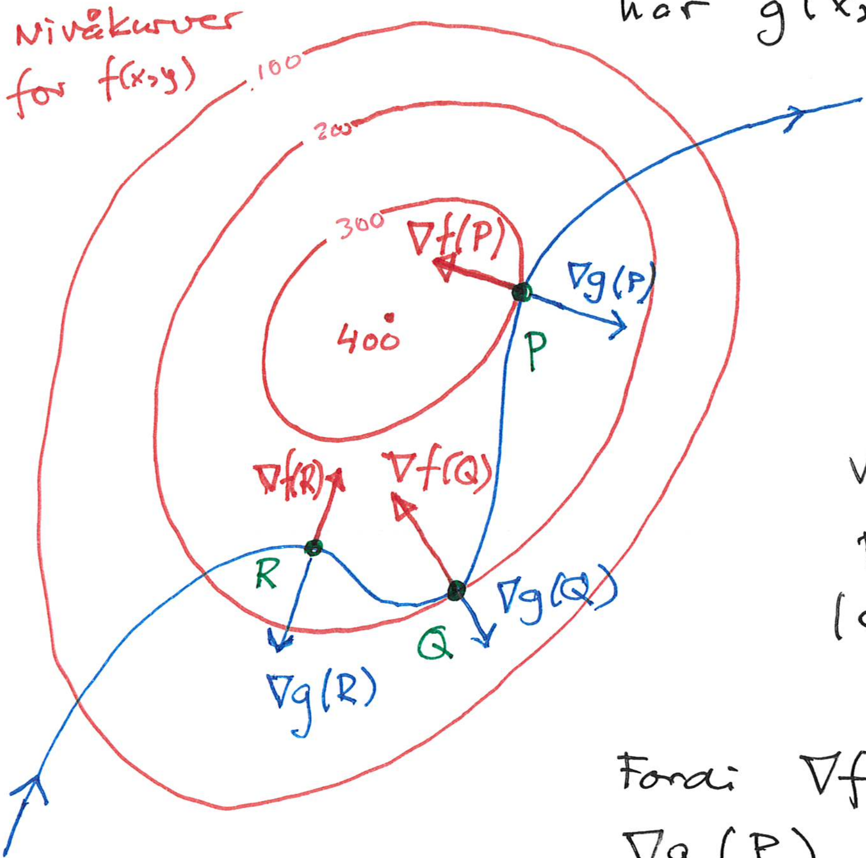
MET 1180, forelesning 47, 2. april 2024, Runar Ile

1. Repetisjon
2. Oppgaver (1/2 e og f)

1. Repetisjon

Lagrangeproblem: Bestem maks/min for $f(x,y)$
når $g(x,y) = a$ (et fast tall!)



implisitt definert med at $g(x,y) = a$
= alle punkter som er løsninger på denne likningen

Vil finne det høyeste punktet på stien!
(dvs maks $f(x,y)$ på stien)

Fordi $\nabla f(P)$ er parallell med $\nabla g(P)$ (fordi tangentene er like)
finnes et tall λ slik at

$$\nabla f(P) = \lambda \cdot \nabla g(P).$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f'_x \\ f'_y \end{bmatrix}$$

Observasjoner:

P globalt maks. pkt.

Q lokalt min. pkt.

R lokalt maks. pkt.

Omvendt: For å finne P løser vi likningssystemet

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = a \end{cases}$$

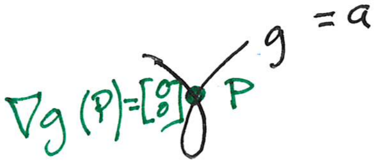
3 ukjente og 3 likninger

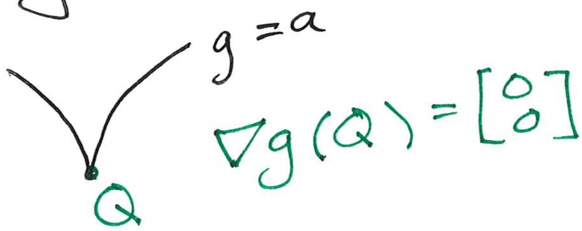
(*) Likningssystemet $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = a \end{cases}$

gir „normale" kandidatpunkter for maks. og min.

(*) En annen type kandidatpunkt:
Degenerert bibetingelse: Løsn. på likningssystemet $\begin{cases} \nabla g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g(x,y) = a \end{cases}$

– løsninger er punkter hvor kurven $g(x,y)=a$ ikke har entydig tangent

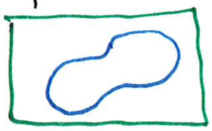




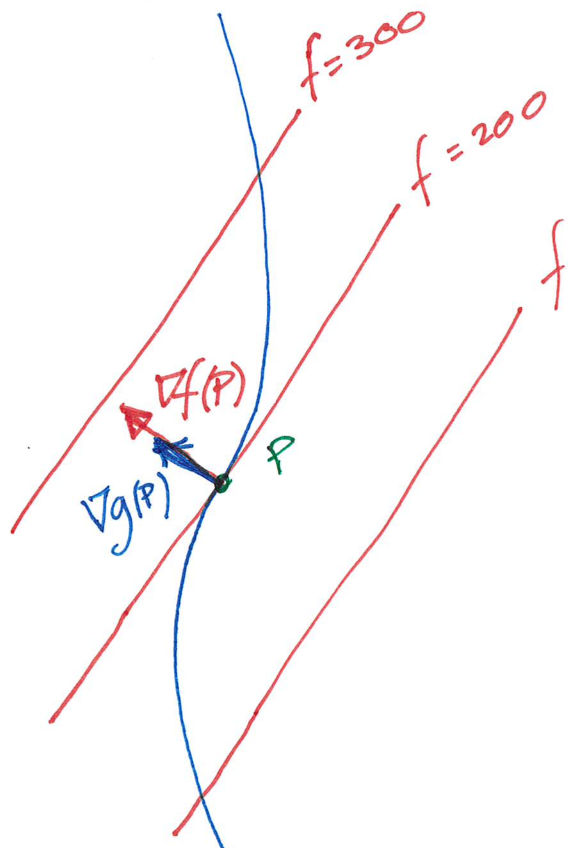
<u>Resultat</u> Et punkt P som gir maks. eller min til $f(x,y)$ når $g(x,y)=a$ vil

<u>enten</u> være en løsning på likningssyst $\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = a \end{cases}$ („normal løsn.")

<u>eller</u> være et degenerert punkt for bibetingelsen, dvs en løsn. på syst. $\begin{cases} \nabla g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g = a \end{cases}$

Hvis kurven $g(x,y)=a$ er kompakt (lukket og begrenset), så sier  ekstremverdisetningen at Lagrange-problemet har løsninger (både maks & min)

Hvis $g(x,y)=a$ <u>ikke</u> kompakt (i praksis: kurven er ubegrenset) <u>kan</u> Lagrange-problemet har løsning (maks. og/eller min.), men behøver ikke ha det.



P vil være en løsning på

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 37 \end{cases}$$

– men hverken lok. min. eller lok. maks. punkt.

(3) Moral: Må ha eget argument når $g=a$ ikke kompakt.

2. oppgaver

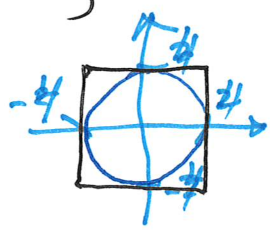
Start: 11.04

Oppg 1/2

e) Maks/min $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 16$ når $\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = \underbrace{16}_{a}$

Merk Kurven $x^2+y^2 = 16$ er en sirkel m. sentrum $(0,0)$ og radius 4.

- lukket fordi vi har en likning
- begrenset fordi sirkelen ligger i et rektangel, f.eks. $-4 \leq x \leq 4$, $-4 \leq y \leq 4$



Altså er sirkelen kompakt (alle sirkler og ellipser er det)

Ekstremverdisetn. sier at problemet har en løsning (både maks. og min.).

To typer kandidatpunkter:

Degenerert bibetingelse

$$\begin{cases} \nabla g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g = 16 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 16 \end{cases}$$

- ingen løsn.

Normale Lagrangepunkter

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 16 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{cases} 2xy^2 - 2x = \lambda \cdot 2x \\ 2yx^2 - 2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2 = 16 \end{cases}$$

dvs $\begin{cases} 2x(y^2-1-\lambda) = 0 & (1) \\ 2y(x^2-1-\lambda) = 0 & (2) \\ x^2+y^2 = 16 & (3) \end{cases}$

(1) enten $x = 0$ eller $y^2 = 1+\lambda$

(2) enten $y = 0$ eller $x^2 = 1+\lambda$

(0,0) er ikke løsn. i (3)

$\underline{x=0}$ (og $y \neq 0$) gir $\underline{\lambda = -1}$ og $\underline{y = \pm 4}$

$\underline{y=0}$ (og $x \neq 0$) gir $\underline{\lambda = -1}$ og $\underline{x = \pm 4}$.

$\underline{x \neq 0, y \neq 0}$: $\begin{cases} y^2 = 1+\lambda \\ x^2 = 1+\lambda \end{cases}$ trekke fra hverandre

Får $y^2 - x^2 = 0$

$(y-x)(y+x) = 0$

$\underline{\text{Enten } y = x}$: (3) gir $2x^2 = 16$ dvs $x = \pm 2\sqrt{2} = y$

$\underline{\text{Eller } y = -x}$: (3) gir $2x^2 = 16$ dvs $x = \pm 2\sqrt{2} = -y$.

– begge tilfeller: $\underline{\lambda = 7}$.

8 normale punkter

$(0, \pm 4; -1)$, $(\pm 4, 0; -1)$, $(\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}; 7)$

$(\mp 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}; 7)$

Regner verdier for kandidatpunktene:

$$f(0,\pm 4) = 0^2(\pm 4)^2 - 0^2 - (\pm 4)^2 + 16 = 0 = f(\pm 4, 0)$$

$$f(\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) = 8\cdot 8 - 8 - 8 + 16 = 64$$

$$= f(\pm 2\sqrt{2}, \mp 2\sqrt{2}).$$

Konkl $\underline{\underline{f_{maks} = 64}}$, $\underline{\underline{f_{min} = 0}}$

når $x^2 + y^2 = 16$.

Oppg 1/2 f. Samme $f(x,y)$, men $\underbrace{xy}_{g(x,y)} = 4$

hyperbel $y = \frac{4}{x}$
– ikke begrenset
(x kan være vilkårlig stor).
så ikke kompakt

Degenert bibet:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$$ – ingen løsn.

Normale pkt:

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2x = \lambda y & (1) \\ 2yx^2 - 2y = \lambda x & (2) \\ xy = 4 \end{cases}$$

Bruker $xy = 4$ i (1) og (2).

Får $\begin{cases} 2\cdot 4\cdot y - 2x = \lambda y \\ 2\cdot 4\cdot x - 2y = \lambda x \end{cases}$ dvs $\begin{cases} (8-\lambda)y = 2x \\ (8-\lambda)x = 2y \end{cases}$

Så $x = \frac{(8-\lambda)}{2} y$ setter inn i den andre.

Får $(8-\lambda)^2 y = 4y$

dvs $[(8-\lambda)^2 - 4]y = 0$

Enten $\underline{y=0}$ eller $(8-\lambda)^2 = 4$

- umulig gir $\lambda = \begin{cases} 10 \\ 6 \end{cases}$.

$\underline{\lambda = 10}$ $\begin{cases} -2y = 2x \\ -2x = 2y \end{cases}$ $y = -x$ gir $-x^2 = 4$

- ingen løsn.

$\underline{\lambda = 6}$ $\begin{cases} 2y = 2x \\ 2x = 2y \end{cases}$ så $x = y$ gir

$(-2,-2;6)$, $(2,2;6)$.

Spesielle verdier:

$f(-2,-2) = (-2)^2 \cdot (-2)^2 - (-2)^2 - (-2)^2 + 16 = 24$

$f(2,2) = 24$.

Men er dette maks, min. eller ingen av delene?

Kan bruke bibetingelsen $xy = 4$ til å skrive

om $f(x,y) = (xy)^2 - x^2 - y^2 + 16$

$= 4^2 - (x^2+y^2) + 16$

$= 32 - (x^2+y^2)$

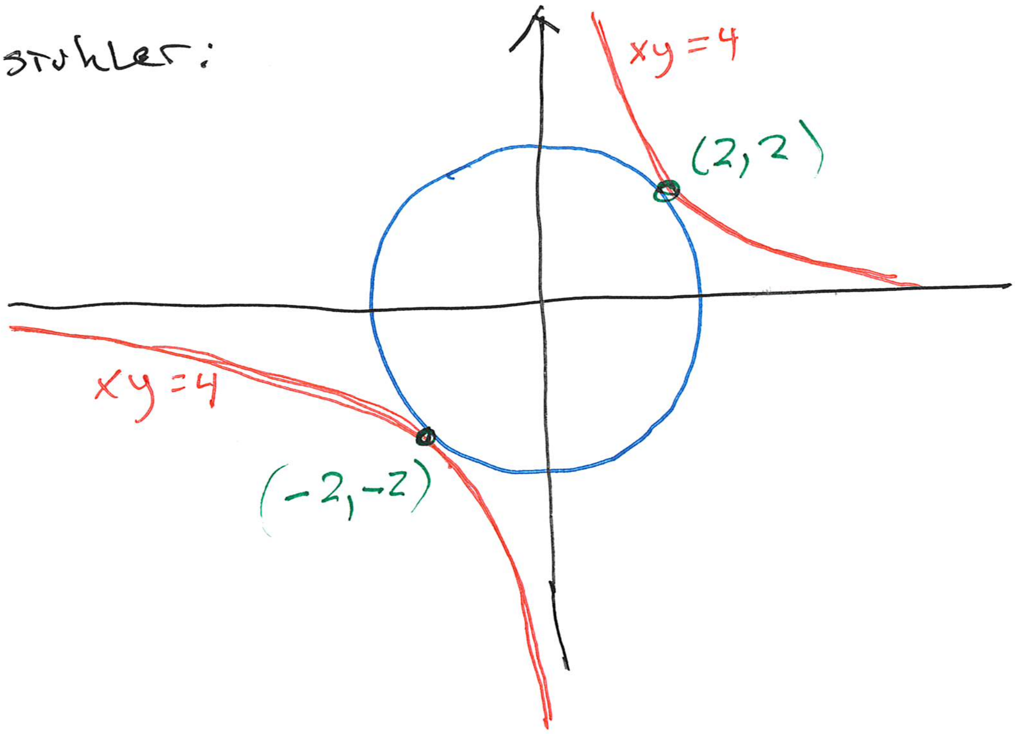
7

Så er $y = \frac{4}{x}$ så:

$$f(x,y) = 32 - \left(x^2 + \frac{4^2}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty$$

Så ingen minimumspunkter

Nivåkurvene til $f(x,y) = 32 - (x^2+y^2)$ er sirkler:



Minste sirkel gir største verdi. Sirkelen gjennom punktene $(2,2)$ og $(-2,-2)$ er den minste sirkelen som skjærer kurven $xy = 4$. Dette er derfor globale maks. punkter for Lagrangeproblemet.