

- Plan
1. Regulære kontaktstrømmer
 2. Uendelige geometriske rekker og grenseverdier
 3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning
-

1. Regulære kontaktstrømmer

Et fast beløp betales hver termin. Like lange terminer.

EKS Annuitetslån (nåverdien av kontaktstrømmen = lånebeløpet)

EKS Sparing med et fast beløp hver termin.
(fremtidsverdi gir oppspart beløp)

- begge gir geometriske rekker

EKS (Fagoppg. 2019h, oppg. 6a)

Kåre vurderer et boliglån med

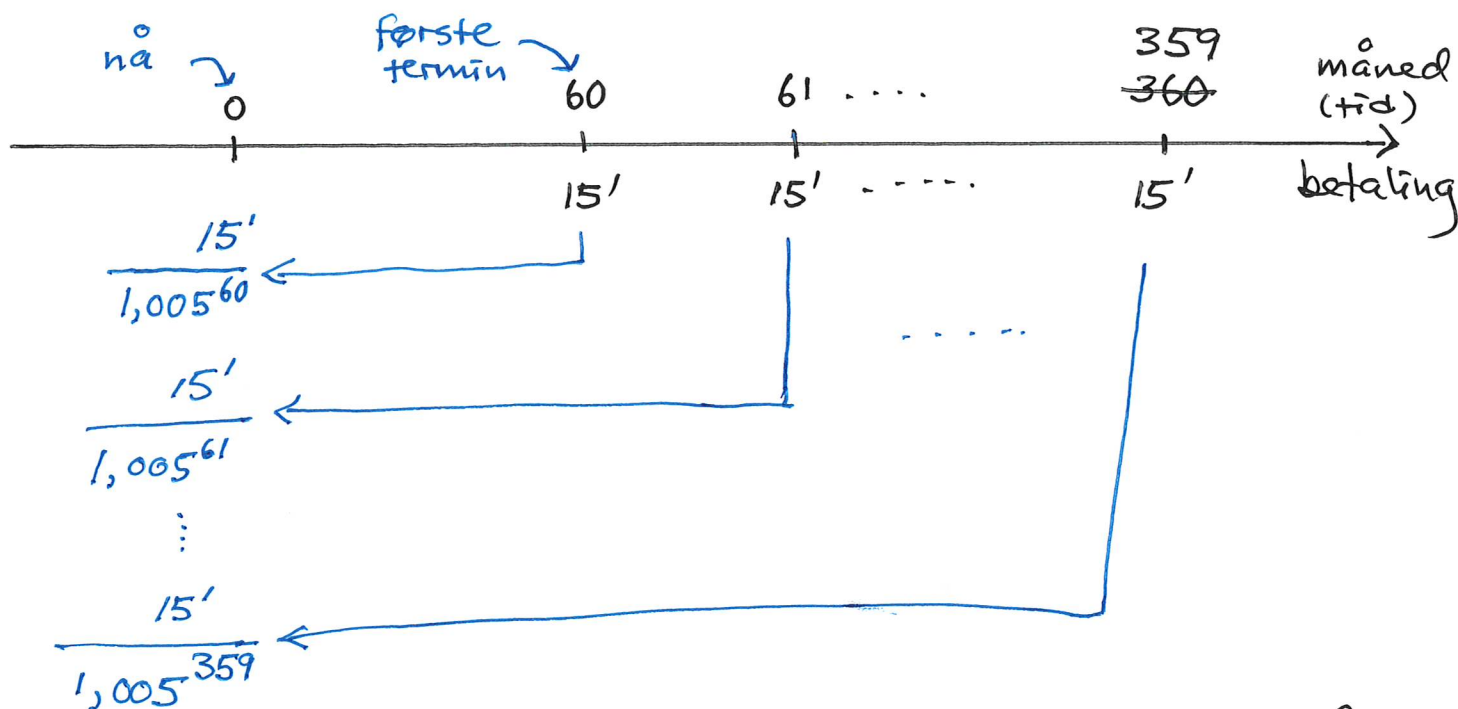
- månedlige terminer over 25 år
- han regner med å kunne betale 15000/mnd
- første termin om 5 år
- nominell rente 6% med månedlig forrentning

i) Finn den geometriske rekken som gir nåverdien til kontaktstrømmen

ii) Beregn hvor mye Kåre kan låne

Løsning Månedrente = $\frac{6\%}{12} = 0,5\%$

Antall terminer $12 \cdot 25 = 300$



Summen (nåverdien) er en geom. rekke med

$$a_1 = \frac{15'}{1,005^{359}}, \quad k = 1,005, \quad n = 300$$

$$\begin{aligned} \text{Nåverdi} = \text{lånebeløp} &= \frac{15'}{1,005^{359}} \cdot \frac{1,005^{300} - 1}{0,005} \\ &= \underline{\underline{1734620,76}} \end{aligned}$$

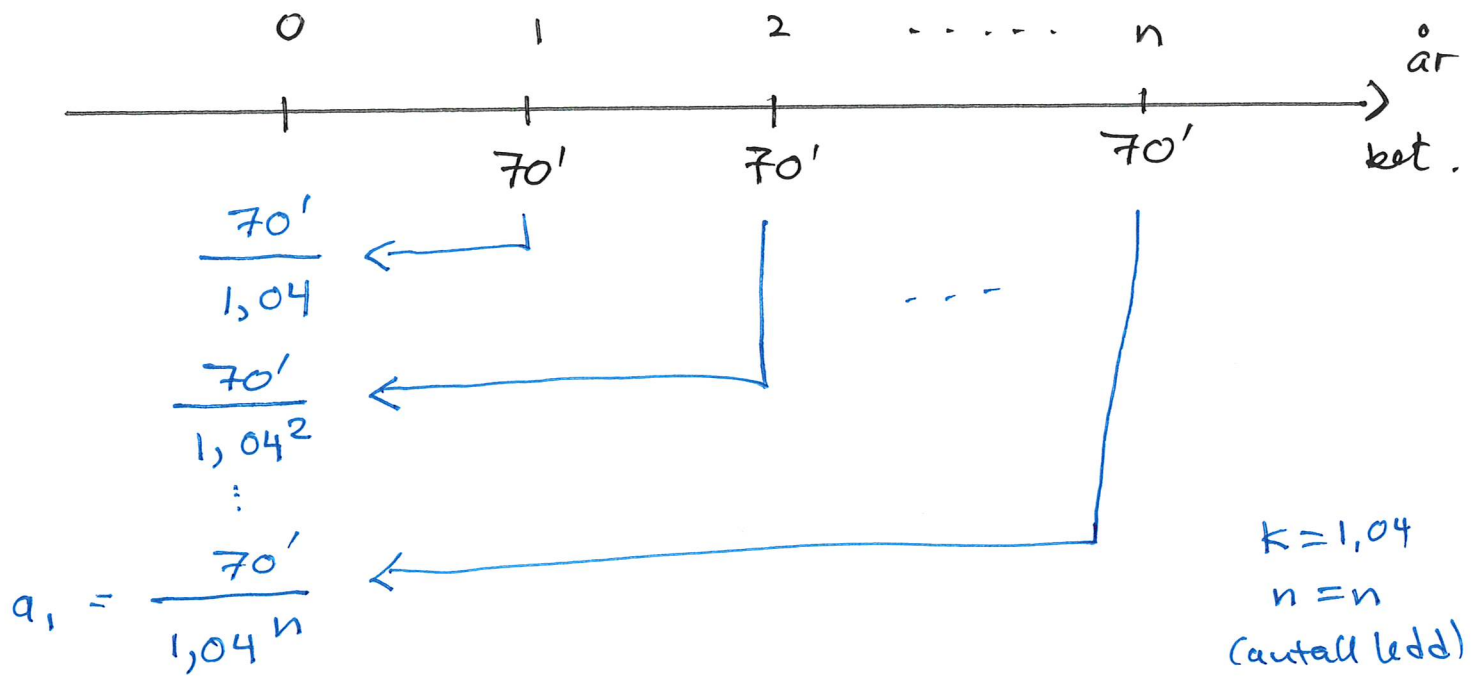
2. Uendelig geom. rekker og grensverdier

Eks. Annuitet : 70'
rente : 4%

Ant. terminer : n (år)

Første betaling : 1 år fra nå

Lånebeløpet er da nåverdien til
kontantstrømmen :



Formelen for en geom. rekke gir

$$\frac{70'}{1,04^n} \cdot \frac{1,04^n - 1}{0,04} = \frac{70' \cdot (1,04^n - 1)}{0,04 \cdot 1,04^n}$$

$$= \frac{70'}{0,04} \cdot \frac{(1,04^n - 1)}{1,04^n} = \frac{70'}{0,04} \cdot \left(1 - \frac{1}{1,04^n}\right)$$

Så hele brøken (nåverdien) nærmer seg

$$\frac{70'}{0,04} = \underline{\underline{1,75 \text{ mill.}}}$$

nærmer seg 0
når n blir
større og større
($n \rightarrow \infty$)

Konklusjon Hvis du betaler banken 70000 hvert år i all fremtid, kan banken låne deg 1,75 mill. til 4% rente.

Start: 9.00

(3)

3. Eulers tall og kontinuerlig forrentning

EKS Du setter inn 1000 på en konto med 12% nominell rente. Pengene står ett år.

Forrentning	Balansen etter ett år
Årlig	$1000 \cdot 1,12 = 1120,00$
Halvårlig	$1000 \cdot 1,06^2 = 1123,60$
Kvartalsvis	$1000 \cdot 1,03^4 = 1125,51$
Månedlig	$1000 \cdot 1,01^{12} = 1126,83$
Daglig	$1000 \cdot \left(1 + \frac{12\%}{365}\right)^{365} = 1127,47$

Mønster: Med n terminer får vi $1000 \cdot \left(1 + \frac{12\%}{n}\right)^n$

Eulers tall: $e = 2,718281\dots$

$$1 \boxed{e^x}$$

Beregn $1000 \cdot e^{0,12} = 1127,50$

$$1000 \boxed{\times} 0,12 \boxed{e^x} \boxed{=}$$

Eulers tall er definert som grenseverdien til $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ når n blir større og større (uteangrenser)

$$\text{Skriver } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$$

Etter 1 år med 12% nominell rente og kontinuerlig forrentning har innskuddet på 1000 vokst til

$$1000 \cdot e^{0,12} = 1127,50$$

den årlige vekstfaktoren med kontinuerlig forrentning og 12% nom. rente.

Eks $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71692\dots$

$$\left(1 + \frac{1}{1\text{mill}}\right)^{1\text{mill}} = 2,71828\dots$$

Tilbake til eksempelet med 12% :

$$\left(1 + \frac{0,12}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{n}{0,12}\right)}\right)^{\frac{n}{0,12}} \right]^{0,12} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{0,12}$$

nærmer seg e
når $n \rightarrow \infty$

$$\text{Så } 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,12}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1000 \cdot e^{0,12}$$

Den effektive renten (relativ endring på ett år)

$$\text{er } e^{0,12} - 1 = 12,7497\%$$

Oppg Du setter 10 mill. på en konto med 2,8% (nominell) rente. Beregn balansen etter 5 år

- Med årlig forrentning
- Med kontinuerlig forrentning
- Bestem den effektive renten med kontinuerlig forrentning

Løsning

a) Vekstfaktor for ett år: 1,0280

Balansen etter 5 år: $10 \text{ mill} \cdot 1,028^5$
 $= \underline{\underline{11,48 \text{ mill}}}$

b) Vekstfaktor for ett år: $e^{0,028} = 1,0284$

Balansen etter 5 år: $10 \text{ mill} \cdot (e^{0,028})^5$
 $= 10 \text{ mill} \cdot e^{0,028 \cdot 5}$

$= 10 \text{ mill} \cdot e^{0,140}$

$= \underline{\underline{11,50 \text{ mill}}}$

c) Effektiv rente er

$e^{0,028} - 1 = 1,0284 - 1 = \underline{\underline{2,84\%}}$