MET1180, forelesning 6, 12. sept. 2023, Runar Ile

Plan
1. Repetisjon
2. Lineære og kvadratiske likninger
3. Likninger med parametre: abc-formelen

1. Repetisjon (Fagoppg. 2021h, oppg 1a)

i) Beregn summen

$$6000 \cdot 1{,}0025^{96} + 6000 \cdot 1{,}0025^{95} + \dots + 6000 \cdot 1{,}0025^{26} + 6000 \cdot 1{,}0025^{25}$$

Løsning Dette er en geom. rekke med

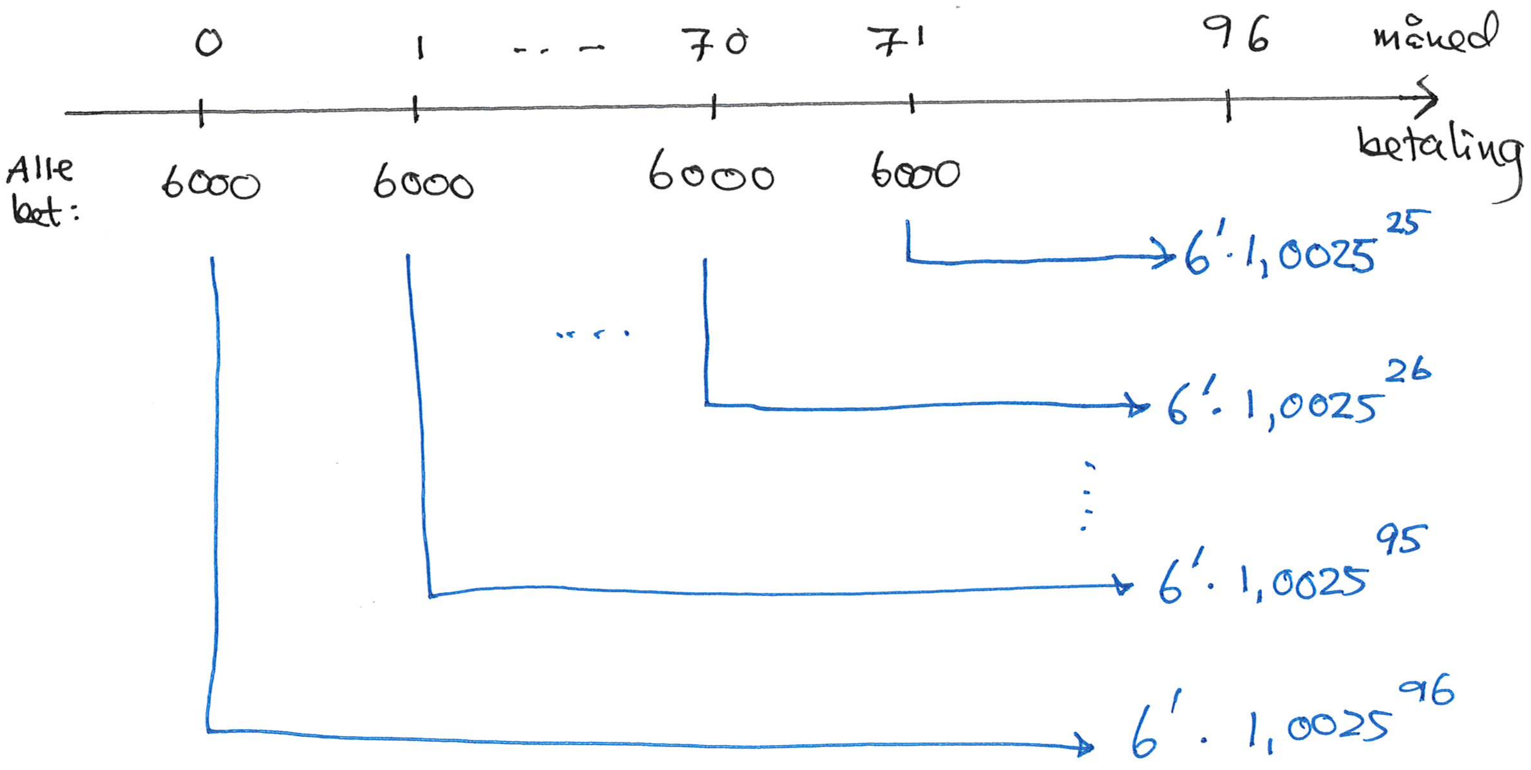
- første ledd $= 6000 \cdot 1{,}0025^{25}$ (eller $6000 \cdot 1{,}0025^{96}$)
- multiplikasjonsfaktor „vekstfaktor" $= 1{,}0025$ (eller $\frac{1}{1{,}0025} = 1{,}0025^{-1}$)
- antall ledd $= 96 - 24 = 72$ (ingen valg)

Formelen for summen av en geom. rekke gir

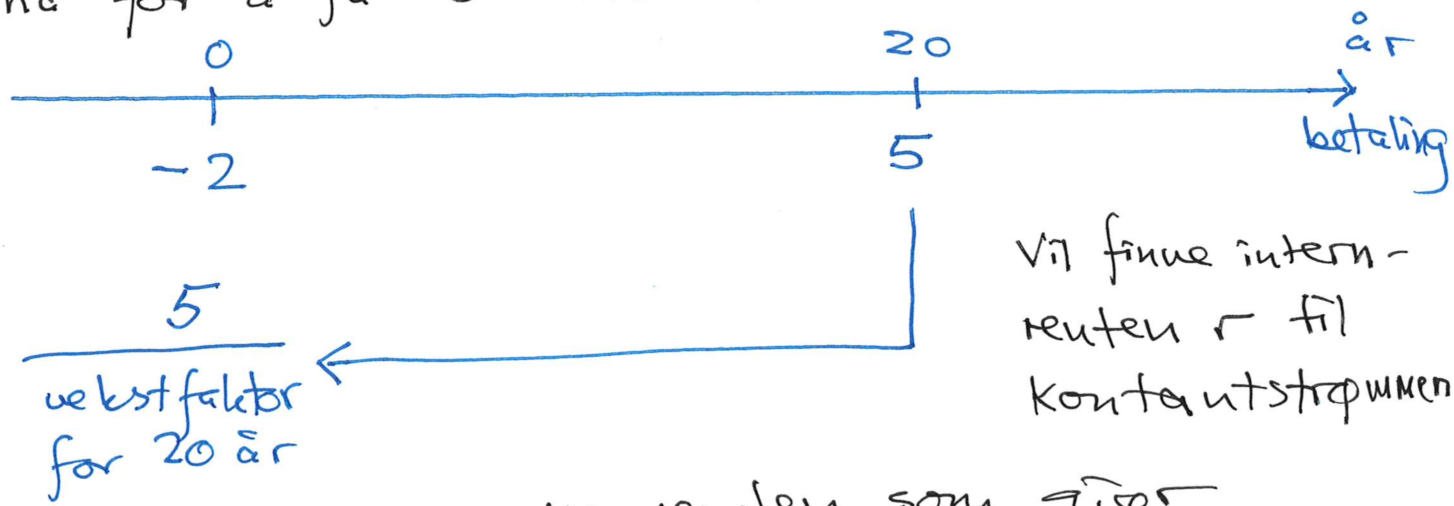
$$a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 6000 \cdot 1{,}0025^{25} \cdot \frac{1{,}0025^{72} - 1}{0{,}0025} = \underline{\underline{503\,122{,}08}}$$

ii) Beskriv en finanssituasjon hvor denne summen er relevant (de viktige tallene skal tolkes)

Løsning Hvis vi leser summen fra venstre mot høyre er den balansen på en konto etter 8 år hvis 6000 settes inn hver måned i 6 år (dvs 72 innskudd) med første innskudd i dag (og det er leddet helt til venstre), 3% nominell rente, månedlig forrentning, perioderente $= \frac{3\%}{12} = 0{,}0025$



<u>Oppg 5</u> (forrige uke) Du vurderer å investere 2 mill. nå for å få 5 mill. om 20 år



Vil finne internrenten r til kontantstrømmen

Internrenten er den renten som gjør denne summen lik 0.

a) Årlig forrentning. Da er vekstfaktor for 20 år $(1+r)^{20}$. Får likningen

$$-2 + \frac{5}{(1+r)^{20}} = 0 \quad \text{som gir} \quad 5 = 2\cdot(1+r)^{20}$$

så $(1+r)^{20} = \frac{5}{2}$ dvs $1+r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}}$

så $r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}} - 1 = \underline{\underline{4{,}69\,\%}}$

2,5 $\boxed{y^x}$ 20 $\boxed{1/x}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$

b) Med kvartalsvis forrentning vil det være $4 \cdot 20 = 80$ terminer med terminvis internrente r. Får likningen

$$(1+r)^{80} = \frac{5}{2} \quad \text{dvs} \quad r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{80}} - 1$$

$$= 1{,}152\,\%$$

som gir nominell årlig internrente

$4 \cdot 1{,}152\,\% = \underline{\underline{4{,}61\,\%}}$

d) Med kontinuerlig forrentning er den årlige vekstfaktoren e^r (r = årlig, nominell internrente). Nåverdien blir

$$-2 + \frac{5}{(e^r)^{20}}$$ som skal være 0.

Altså $(e^r)^{20} = \frac{5}{2}$ dvs $e^r = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{20}} = 1{,}0469\ldots$

Prøver ulike verdier for r (bør være litt mindre enn 4,61 %. Er godt svar: $\underline{\underline{r = 4{,}58\,\%}}$

(eller $r = \frac{\ln 5 - \ln 2}{20}$)

Start: 15.03

~~Oppg~~ Du setter 2 mill. inn på konto i dag, årlig (nominell) rente er 12% med kontinuerlig forrentning. Bestem balansen etter 1 år og 7 måneder.

Løsning $2 \text{ mill} \cdot \underbrace{e^{0,12}}_{\text{veksfaktor for 1 år}} \cdot \underbrace{\Big(\underbrace{(e^{0,12})^{\frac{1}{12}}}_{\text{veksfaktor for 1 mnd}}\Big)^7}_{\text{veksfaktor for 7 mnd.}}$

$= 2 \text{mill} \cdot e^{0,12} \cdot (e^{0,01})^7$

$= 2 \text{ mill} \cdot e^{0,12+0,07} = 2 \text{mill} \cdot e^{0,19} = \underline{\underline{2,42 \text{ mill}}}$

---

2. Lineære og kvadratiske uttrykk

Et lineært uttrykk $ax + b$ (a og b er tall, $a \neq 0$)

Eks $4x - 3$ $(a = 4, \; b = -3)$

En lineær likning - en likn. som kan gjøres om til: $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$

Eks: $\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+4}$ $\quad | \cdot (x+3)\cdot(x+4)$ $\quad \begin{pmatrix} x \neq -3 \\ x \neq -4 \end{pmatrix}$

Multipliseer på begge sider med en fellesnevner

gir $x + 4 = 2(x+3)$

dvs $x + 4 = 2x + 6$

trekke fra $2x + 6$ på begge sider

dvs $-x - 2 = 0$

$(a = -1, \; b = -2)$

$(x \neq -3, \; x \neq -4)$

Et kvadratisk uttrykk: $\underbrace{a}\,x^2 + \underbrace{b}\,x + \underbrace{c}_{\text{tall}} \quad (a \neq 0)$

En kvadratisk likning

- en likning som kan gjøres om til en ekvivalent likning $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

EKS Likningen $3x+9 = (x-1)(x+3)$ er kvadratisk fordi:

– „løser opp parantesene"

$$3x+9 = x^2+3x-x-3$$

– trekker fra $3x+9$ på b.s.

$$0 = x^2-x-12 \quad (a=1, b=-1, c=-12)$$

EKS Likningen $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = 3 \;\Big|\cdot x(x+1)$ er kvadratisk

fordi: – multipliserer m. felles nevner på b.s.

får $\quad x+1+2x = 3x(x+1)$

– løser opp parantesen

$$3x+1 = 3x^2+3x$$

– trekker sammen $\quad 3x^2-1=0 \quad (a=3, b=0, c=-1)$

3. Likninger med parametre: abc-formelen

Hvis $a \neq 0$ har likningen $ax^2 + bx + c = 0$

løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eks $3x^2 + 4x - 5 = 0$ $(a = 3, b = 4, c = -5)$

abc-formelen gir løsningene

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 60}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{19}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{\cancel{2}(-2 \pm \sqrt{19})}{\cancel{2} \cdot 3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}}} = \underline{\underline{-\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}}}$$