

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing.

R. Lucas

Forelesning 13-14

Kap 3.9-13: Rasjonale funksjoner og asymptoter. Omvendte funksjoner.
Ekspontialfunksjoner. Logaritmer.

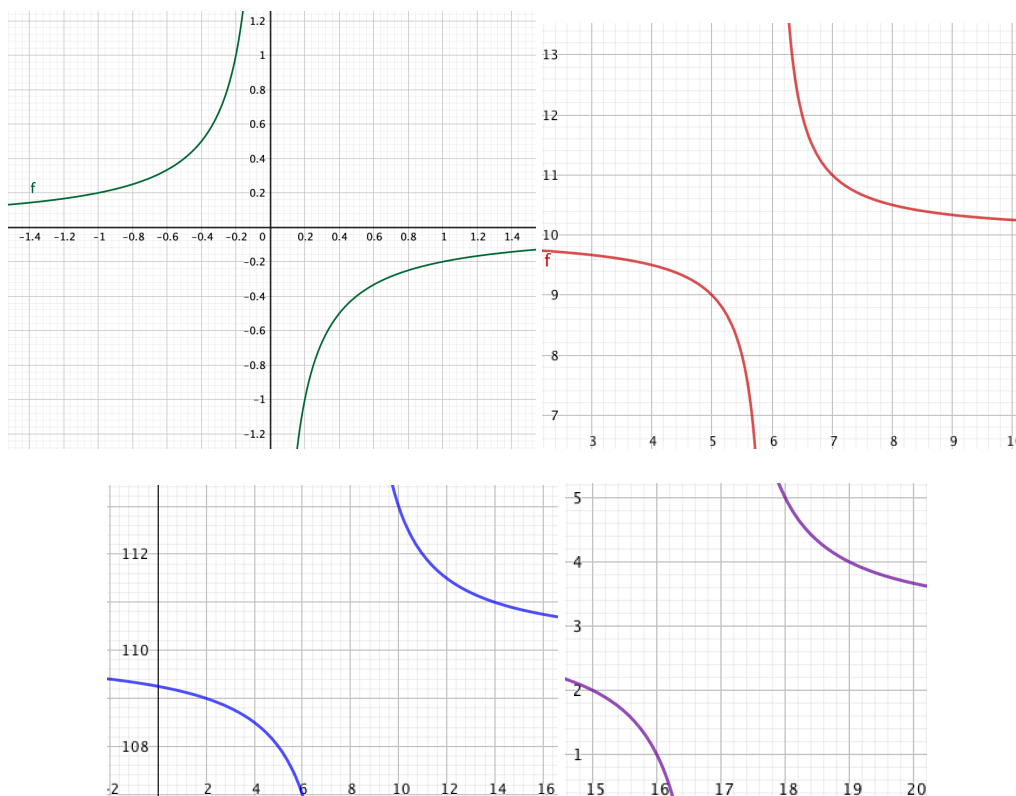
[L] 3.8.1-4	Flervalgseksamen 2016h oppg 8 og 13
[L] 3.9.1-4	Flervalgseksamen 2017v oppg 8 og 13
[L] 3.11.1-3	Flervalgseksamen 2015h oppg 9 og 14
[L] 3.12.1-5	Flervalgseksamen 2016v oppg 9 og 11
[L] 3.13.1-3	Flervalgseksamen 2018v oppg 13

Repetisjon:

- Flervalgseksamen 2015h oppg 9
- Flervalgseksamen 2016v oppg 9
- Flervalgseksamen 2016h oppg 7 og 8
- Flervalgseksamen 2017v oppg 7 og 8

Oppgaver for veiledningstimen torsdag 13/10 10-13.45 i D1-065/70 og 14-17+ i CU1-067.

Oppgave 1 Bestem funksjonsuttrykket $f(x) = c + \frac{a}{x-b}$ til hyperblene (a-d) i figur 1.



Figur 1: Hyperbler a-d

Oppgave 2 Bestem asymptotene til hyperblene (a-d) i oppgave 1.

Oppgave 3 Bestem asymptotene til de rasjonale funksjonene.

a) $f(x) = \frac{4x-10}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{70-40x}{3-2x}$ c) $f(x) = \frac{3x^2-6x+8}{x^2+3}$
 d) $f(x) = \frac{4x^2-28x+40}{x^2-4x+3}$ e) $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x-7}$ f) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-10x+16}$

Oppgave 4 Anta $g(x)$ er den omvendte funksjonen til $f(x)$. Bestem:

a) $g(10)$ hvis $f(3) = 10$ b) $f(g(5))$ c) $f(\sqrt{2})$ hvis $g(3) = \sqrt{2}$ d) $g(f(9))$

Oppgave 5 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f .

a) $f(x) = 2x - 3$ med $D_f = \text{hele tallinjen}$ b) $f(x) = 0,5x + 1,5$ med $D_f = \text{hele tallinjen}$ c) $f(x) = x^2 + 6x$ med $D_f = \langle -\infty, -3 \rangle$
 d) $f(x) = 20 + \frac{1}{x-3}$ med $D_f = \langle 3, \infty \rangle$ e) $f(x) = (x - 1)^3 + 50$ med $D_f = [1, \infty)$
 f)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} & \text{hvis } 0 < x \leq 10 \\ 2 - \frac{x}{10} & \text{hvis } 10 < x \leq 20 \end{cases}$$

Oppgave 6 Vi har (tilnærmet) $\ln 2 = 0,6931$ og $\ln 3 = 1,0986$ og $\ln 5 = 1,6094$. Bruk disse tallene til å finne verdiene (tilnærmet) uten å bruke ln-tasten på kalkulatoren.

a) $\ln 250$ b) $\ln 625$ c) $\ln \frac{625}{216}$
 d) $\ln \frac{1000000}{27}$ e) $\ln 130 - \ln 78$ f) $\ln \sqrt[10]{6}$

Oppgave 7 Løs likningene.

a) $e^x = 5$ b) $e^{2x+1} = 5$ c) $e^{2x+1} = 3e^{x+2}$
 d) $\ln(x) = -2$ e) $\ln(7x - 3) = -2$ f) $\ln(x - 3) = \ln(2x + 1) + 1$
 g) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$ h) $\frac{20 \ln \sqrt{x}}{1 - \ln x} = 10$

Oppgave 8 Løs ulikhetene.

a) $e^x \geq 5$ b) $e^{2x+1} \geq 5$ c) $\ln(x) < -2$ d) $\ln(x - 3) < -2$
 e) $\frac{3e^x}{e^x+1} < 5$ f) $\ln \frac{3x-2}{x-7} \geq 0$

Oppgave 9 Finn asymptotene til funksjonen.

a) $f(x) = e^{-0.1x} + 23$ b) $f(x) = e^{x(10-x)} + 50$ c) $f(x) = \frac{100e^{0,04x}}{e^{0,04x}+50}$
 d) $f(x) = \ln(10 - x)$ e) $f(x) = \ln(x^2 - 400)$
 f) $f(x) = \ln(120x + 10) - \ln(20x - 30)$, $D_f = \langle \frac{3}{2}, \rightarrow \rangle$

Oppgave 10 Finn den omvendte funksjonen $g(x)$ og definisjonsmengden D_g til funksjonen $f(x)$ med definisjonsmengde D_f .

a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - 1$ med $D_f = [0, \infty)$ b) $f(x) = 4 \ln(x - 10)$ med $D_f = [11, \infty)$
 c) $f(x) = e^{\frac{2}{x+10}}$ med $D_f = [0, \infty)$ d) $f(x) = \ln(x^2 - 6x + 7)$ med $D_f = [0, 1)$

Fasit

Oppgave 1

a) $f(x) = -\frac{1}{5x}$ b) $f(x) = 10 + \frac{1}{x-6}$ c) $f(x) = 110 + \frac{6}{x-8}$ d) $f(x) = 3 + \frac{2}{x-17}$

Oppgave 2

- a) vertikal asymptote: $x = 0$, horisontal asymptote: $y = 0$
 b) vertikal asymptote: $x = 6$, horisontal asymptote: $y = 10$
 c) vertikal asymptote: $x = 8$, horisontal asymptote: $y = 110$
 d) vertikal asymptote: $x = 17$, horisontal asymptote: $y = 3$

Oppgave 3

- a) $f(x) = 4 + \frac{2}{x-3}$ så vertikal asymptote: $x = 3$, horisontal asymptote: $y = 4$
 b) $f(x) = 20 + \frac{10}{3-2x}$ så vertikal asymptote: $x = \frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y = 20$
 c) $f(x) = 3 - \frac{6x+1}{x^2+3}$ så ingen vertikal asymptote, horisontal asymptote: $y = 3$
 d) $f(x) = 4 - \frac{4(3x-7)}{(x-1)(x-3)}$ så vertikale asymptoter: $x = 1$ og $x = 3$, horisontal asymptote: $y = 4$
 e) $f(x) = x + 10 + \frac{75}{x-7}$ så vertikal asymptote: $x = 7$, skrå asymptote: $y = x + 10$
 f) $f(x) = x + 10 + \frac{84}{x-8}$ så vertikal asymptote: $x = 8$, skrå asymptote: $y = x + 10$

Oppgave 4 a) $g(10) = 3$ b) $f(g(5)) = 5$ c) $f(\sqrt{2}) = 3$ d) $g(f(9)) = 9$

Oppgave 5

- a) $g(x) = 0,5x + 1,5$ med $D_g = \langle -\infty, \infty \rangle$ (alle tall på tallinjen)
 b) $g(x) = 2x - 3$, $D_g = \langle -\infty, \infty \rangle$ (alle tall på tallinjen)
 c) $g(x) = -3 - \sqrt{x+9}$, $D_g = V_f = [-9, \infty)$
 d) $g(x) = 3 + \frac{1}{x-20}$, $D_g = \langle 20, \infty \rangle$
 e) $g(x) = \sqrt[3]{x-50} + 1$, $D_g = [50, \infty)$
 f)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10}{x} & \text{hvis } x \geq 1 \\ 20 - 10x & \text{hvis } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Oppgave 6

- a) $\ln 250 = \ln 2 + 3 \ln 5 = 0,6931 + 3 \cdot 1,6094 = 5,5213$
 b) $\ln 625 = 4 \ln 5 = 4 \cdot 1,6094 = 6,4376$
 c) $\ln \frac{625}{216} = 4 \ln 5 - 3(\ln 3 + \ln 2) = 4 \cdot 1,6094 - 3(1,0986 + 0,6931) = 1,0625$
 d) $\ln \frac{1000000}{27} = 6(\ln 5 + \ln 2) - 3 \ln 3 = 6 \cdot (1,6094 + 0,6931) - 3 \cdot 1,0986 = 10,5192$
 e) $\ln 130 - \ln 78 = \ln 5 + \ln 26 - \ln 3 - \ln 26 = 1,6094 - 1,0986 = 0,5108$
 f) $\ln 6^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \ln 6 = \frac{1,0986+0,6931}{10} = 0,1792$

Oppgave 7

- a) $x = \ln 5$ b) $x = \frac{1}{2}(\ln(5) - 1)$ c) $x = 1 + \ln(3)$ d) $x = e^{-2}$
 e) $x = \frac{e^{-2}+3}{7}$ f) $x = -\frac{e+3}{2e-1}$ g) $x = \ln 5$ h) $x = e^{0,5}$

Oppgave 8

- a) Fordi $\ln x$ er en strengt voksende funksjon for $x > 0$ kan vi sette inn vs og hs i $\ln x$ og beholde ulikheten. Det gir $x \geq \ln 5$.
- b) Vi setter vs og hs inn i $\ln x$ og beholder ulikheten. Det gir $x \geq \frac{1}{2}(\ln 5 - 1)$.
- c) Fordi e^x er en strengt voksende funksjon kan vi sette inn vs og hs i e^x og beholde ulikheten. Det gir $0 < x < e^{-2}$.
- d) Vi setter vs og hs inn i e^x og beholde ulikheten. Det gir $3 < x < 3 + e^{-2}$.
- e) Alle tallene på tallinjen (kalles for de reelle tallene og skrives \mathbb{R} , dvs $x \in \mathbb{R}$).
- f) Legg merke til at ulikheten bare er definert for $x < \frac{2}{3}$ og for $x > 7$. Vi setter vs og hs inn i e^x og beholder ulikheten. Dette gir $\frac{3x-2}{x-7} \geq 1$ som vi så løser: $x \leq -\frac{5}{2}$ eller $x > 7$ (og dette er innenfor definisjonsområdet for ulikheten). Alternativ skrivemåte: $x \in \langle -\infty, -\frac{5}{2} \rangle \cup \langle 7, \infty \rangle$.

Oppgave 9

- a) horisontal asymptote: $y = 23$ (når $x \rightarrow \infty$)
- b) horisontal asymptote: $y = 50$ (når $x \rightarrow \pm\infty$)
- c) horisontale asymptoter: $y = 100$ ($x \rightarrow \infty$) og $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$)
- d) vertikal asymptote: $x = 10$ ($y \rightarrow -\infty$ når $x \rightarrow 10^-$)
- e) vertikale asymptoter: $x = \pm 20$ ($y \rightarrow -\infty$ når $x \rightarrow -20^-$ og $y \rightarrow -\infty$ når $x \rightarrow 20^+$)
- f) vertikal asymptote: $x = \frac{3}{2}$, horisontal asymptote: $y = \ln 6$

Oppgave 10

- a) $g(x) = 3\ln(x + 1)$, $D_g = V_f = [0, \infty)$
- b) $g(x) = e^{\frac{x}{4}} + 10$, $D_g = [0, \infty)$
- c) $g(x) = \frac{2}{\ln x} - 10$, $D_g = \langle 1, \sqrt[5]{e} \rangle$
- d) $g(x) = 3 - \sqrt{e^x + 2}$, $D_g = \langle \ln 2, \ln 7 \rangle$