MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2023
Oppgaver

I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 17 – 18

Kap 4.3, 4.6: Derivasjonsregler. Funksjonsdrøfting med maks/min-problemer.

[L] 4.3.1-13
[L] 4.6.1-6

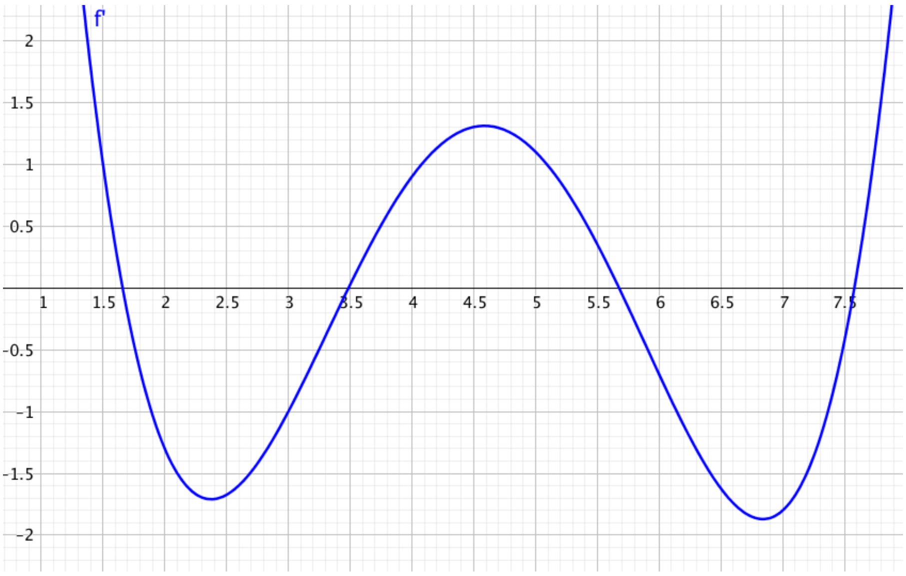
Flervalgseksamen 2015h oppg 12 og 13
Flervalgseksamen 2016v oppg 14
Flervalgseksamen 2017v oppg 10 og 15
Flervalgseksamen 2018v oppg 15

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 26. okt. 10-16+

Oppgave 1 Tegn en grov skisse av grafene til **TO** forskjellige funksjoner $f(x)$ med de oppgitte dataene. NB: Du skal ikke finne noe funksjonsuttrykk!

a) $f'(x)$ er negativ for $x < 5$ og positiv for $x > 5$
b) $f'(x)$ er positiv for $x < 10$, negativ for $10 < x < 15$ og positiv for $x > 15$
c) $f'(x)$ er negativ for $x < 5$, $f'(5) = 0$, $f'(x)$ er negativ for $5 < x < 12$ og $f'(x)$ er positiv for $x > 12$

Oppgave 2 I figur 1 ser du grafen til $f'(x)$.



Figur 1: Grafen til $f'(x)$

Avgjør hvilke utsagn som er sanne.

a) $f'(3) < f'(4)$

b) $f(2) < f(3)$

c) $f(4{,}5) > f(5)$

d) $f(x)$ har et (lokalt) minimum for $x = 3{,}5$

e) $f(x)$ har et (lokalt) minimum for $2 < x < 3$

f) grafen til $f(x)$ har ingen bunnpunkter

g) $f(x)$ avtar i intervallet $[6, 7]$

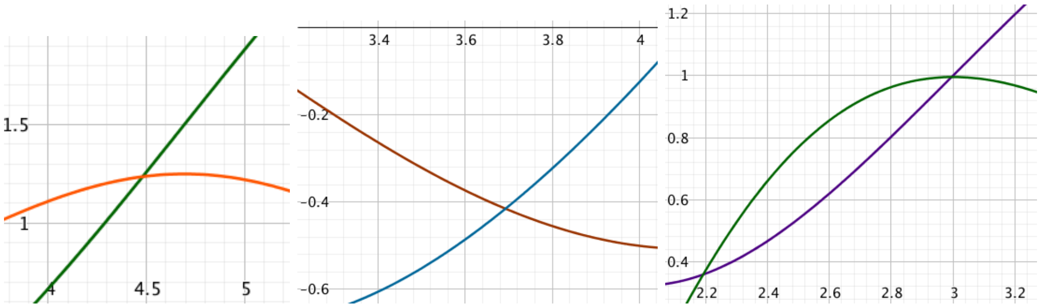
h) $f(x)$ er vokser raskere rundt $x = 1{,}5$ enn rundt $x = 5{,}5$

i) Den deriverte funksjonen til $f'(x)$ er positiv for $x = 7{,}6$

j) $f(x)$ har tre stasjonære punkter

k) Vi kan ikke bruke grafen til $f'(x)$ for å avgjøre om $f(4{,}5)$ er positiv

Oppgave 3 I figur 2 ser du grafene til $f(x)$ og $f'(x)$ i samme koordinatsystem. Avgjør hvilken som er grafen til $f(x)$ og hvilken som er grafen til $f'(x)$ i (a-c).



Figur 2: (a-c): Grafene til $f(x)$ og $f'(x)$

Oppgave 4 Avgjør hvor $f(x)$ har stasjonære punkter, hvor $f(x)$ er strengt avtagende/voksende og finn eventuelle (lokale) maksimums- og minimumspunkter.

a) $f'(x) = 4(x+1)(x-2)(x-5)$

b) $f'(x) = (x-20)e^x$

c) $f'(x) = \frac{(3x-5)(10-2x)}{x^2-6x+10}$

d) $f'(x) = \ln(x) - 1{,}12$

e) $f'(x) = \ln(x^2 - 6x + 10)$

f) $f'(x) = \ln(x^2 - 8)$, $(x > 2{,}9)$

g) $f'(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$

h) $f'(x) = e^{x^2-3} - 2$

Oppgave 5 Bestem maksimum og minimum for disse funksjonene.

a) $f(x) = 1000 - 0{,}2x$ og $D_f = [50, 250]$

b) $f(x) = 0{,}2x^2 - 2{,}8x + 19{,}8$ og $D_f = [2, 12]$

c) $f(x) = 20 - \frac{1}{x-5}$ og $D_f = [6, 15]$

d) $f(x) = 10xe^{-0{,}1x}$ og $D_f = [2, 30]$

e) $f(x) = 2x^3 - 33x^2 + 168x + 9$ og $D_f = [2{,}5, 8{,}6]$

f) $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$ og $D_f = [4, 5]$

Oppgave 6 Middelverdisetningen sier at hvis $f(x)$ er definert og kontinuerlig (sammenhengende graf) på intervallet $[a, b]$ og derverbar (ingen knekkpunkter) så finnes det et tall c mellom a og b slik at $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

a) Vi har $f(x) = \sqrt{\ln[(x-4)^2 + 5]} + x^3 - 4x$. Beregn $\frac{f(6)-f(2)}{4}$ og forklar hvorfor det finnes et tall c med $2 < c < 6$ slik at $f'(c) = 48$.

b) Vi har en kontinuerlig og deriverbar funksjon $f(x)$ med $f(13) = 600e^{1{,}14} = f(17)$. Forklar hvorfor $f(x)$ har et stasjonært punkt mellom 13 og 17.

Oppgave 7 Beregn uttrykket for den deriverte funksjonen til $f(x)$.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 13)$ b) $f(x) = e^{0{,}035x^2}$ c) $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 4x + 5}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1-x)}$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2016v, oppg 12, litt modifisert)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$. Hvilket utsagn er sant?
(A) Funksjonen f er voksende på hele tallinjen
(B) Funksjonen f er voksende på $[-2, \rightarrow\rangle$
(C) Funksjonen f er voksende på $\langle\leftarrow, 2]$
(D) Funksjonen f er voksende på $\langle\leftarrow, -2]$
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

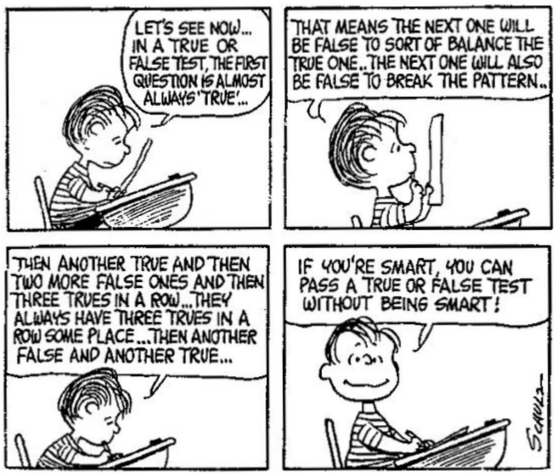
Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 10)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$. Hvilket utsagn er sant?
(A) Funksjonen f har ingen lokale minimumspunkter
(B) Funksjonen f har ett lokalt minimumspunkt, og det er $x = -3$
(C) Funksjonen f har ett lokalt minimumspunkt, og det er $x = 1$
(D) Funksjonen f har flere lokale minimumspunkter
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 10 (Flervalgseksamen 2018v, oppg 10)
Vi betrakter funksjonen gitt ved $f(x) = x^2 e^{1-x}$. Hvilket utsagn er sant?
(A) Funksjonen f har ett lokalt maksimumspunkt $x = a$ med $a > 0$
(B) Funksjonen f har flere lokale maksimumspunkter
(C) Funksjonen f har ett lokalet maksimumspunkt $x = 0$
(D) Funksjonen f har ett lokalet maksimumspunkt $x = a$ med $a < 0$
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Fasit

Oppgave 1
Det er mange muligheter. Sammenlign med andre studenter, spør læringsassistentene!

Oppgave 2



Figur 3: True or false

Oppgave 3
a) $f(x)$: Grønn b) $f(x)$: Brun c) $f(x)$: Fiolett

Oppgave 4
a) Stasjonære punkter: $x = -1$, $x = 2$, $x = 5$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant -1$, $f(x)$ er strengt voksende for $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $f(x)$ er strengt avtagende for $2 \leqslant x \leqslant 5$, $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 5$. Dermed er $x = -1$ et lokalt minimumspunkt, $x = 2$ et lokalt maksimumspunkt og $x = 5$ et lokalt minimumspunkt.
b) Stasjonære punkter: Bare $x = 20$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant 20$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 20$. Dermed er $x = 20$ et globalt minimumspunkt.

c) Stasjonære punkter: $x = \frac{5}{3}$ og $x = 5$. $f(x)$ er strengt avtagende for $x \leqslant \frac{5}{3}$, $f(x)$ er strengt voksende for $\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 5$, $f(x)$ er strengt avtagende for $x \geqslant 5$. Dermed er $x = \frac{5}{3}$ et lokalt minimumspunkt og $x = 5$ et lokalt maksimumspunkt.
d) Stasjonære punkter: Bare $x = e^{1,12}$. $f(x)$ er strengt avtagende for $0 < x \leqslant e^{1,12}$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant e^{1,12}$. Dermed er $x = e^{1,12}$ et globalt minimumspunkt.
e) Stasjonære punkter: Bare $x = 3$. $f(x)$ er strengt voksende for alle x. Dermed er $x = 3$ hverken et lokalt minimumspunkt eller et lokalt maksimumspunkt (et *terrassepunkt*).
f) Stasjonære punkter: Bare $x = 3$. $f(x)$ er strengt avtagende for $2{,}9 < x \leqslant 3$, $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant 3$. Dermed er $x = 3$ et globalt minimumspunkt.
g) $f'(x) = (e^x - 1)(e^x - 3)$. Stasjonære punkter: $x = 0$ og $x = \ln(3)$. $f(x)$ er strengt voksende for $x \leqslant 0$, $f(x)$ er strengt avtagende for $0 \leqslant x \leqslant \ln(3)$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant \ln(3)$. Dermed er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt og $x = \ln(3)$ et lokalt minimumspunkt.
h) Stasjonære punkter: $x = \pm\sqrt{3 + \ln(2)}$. $f(x)$ er strengt voksende for $x \leqslant -\sqrt{3 + \ln(2)}$, $f(x)$ er strengt avtagende for $-\sqrt{3 + \ln(2)} \leqslant x \leqslant \sqrt{3 + \ln(2)}$ og $f(x)$ er strengt voksende for $x \geqslant \sqrt{3 + \ln(2)}$. Dermed er $x = -\sqrt{3 + \ln(2)}$ et lokalt maksimumspunkt og $x = \sqrt{3 + \ln(2)}$ et lokalt minimumspunkt.

Oppgave 5 Her bruker vi ekstremverdisetningen (s. 170).
a) min $f(250) = 950$ maks: $f(50) = 990$
b) min $f(7) = 10$ maks: $f(2) = 15 = f(12)$
c) min: $f(6) = 19$ maks: $f(15) = 19{,}9$
d) min: $f(30) = 14{,}94$ maks: $f(10) = 36{,}79$
e) min: $f(7) = 254 = f(2{,}5)$ maks: $f(8{,}6) = 285{,}23$
f) min: $f(5) = 0{,}00672$ maks: $f(4) = 0{,}01815$

Oppgave 6
a) $\frac{f(6)-f(2)}{4} = 48$. Fordi $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar for alle x gir middelverdisetningen (se også s. 166) at det finnes et tall c med $2 < c < 6$ slik at $f'(c) = 48$.
b) Fra middelverdisetningen følger det at det finnes et tall c i intervallet $\langle 13\,,17\rangle$ slik at $f'(c) = 0$ og da er $x = c$ et stasjonært punkt for $f(x)$.

Oppgave 7

(a) $f'(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 - 7x + 13}$ (b) $f'(x) = 0{,}07xe^{0{,}035x^2}$

(c) $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + 2}{\sqrt{e^{2x} + 4x + 5}}$ (d) $f'(x) = \dfrac{(1-x)\ln(1-x) + x}{(1-x)[\ln(1-x)]^2}$

Oppgave 8
B

Oppgave 9
C

Oppgave 10
A