MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Høst 2023
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 23 – 24

Kap 4.9-10: Elastisitet. Linearisering. Taylorpolynomer.

[L] **4.9** 3-4, 7-8
[L] **4.10** 1-7

Flervalgseksamen 2018h oppg 10, 13
Flervalgseksamen 2019v oppg 11
Flervalgseksamen 2019h oppg 11

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 16/11 fra 10 i D1-065/70.

Oppgave 1 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Bestem den relative prisendringen, den relative etterspørselsendringen og priselastisiteten. Avgjør om etterpørselen er elastisk, uelastisk eller nøytralelastisk.
a) $D(30) = 40$ og $D(30{,}5) = 39$
b) $D(20) = 101$ og $D(21) = 100{,}95$
c) $D(10) = 24{,}648$ og $D(10{,}01) = 24{,}623$

Oppgave 2 La p være prisen på en vare og $D(p)$ etterspørselen (= antall solgte enheter). Beregn den momentane priselastisiteten $\varepsilon(p) = \mathrm{El}_p(D(p))$. Bestem prisen p slik at etterpørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.
a) $D(p) = 100 - 2p$ med $0 < p < 50$
b) $D(p) = 100 + \frac{20}{p}$ med $p \geqslant 1$
c) $D(p) = 67e^{-0.1p}$ med $p > 0$
d) $D(p) = 100 + \frac{900}{p^2}$ med $p \geqslant 1$
e) $D(p) = 53e^{-0.02p^2}$ med $p > 0$

Oppgave 3
a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = e^x$ ved 0.
b) Beregn $P_1(1), \dots, P_4(1)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(1) = e$.

Oppgave 4
a) Finn Taylorpolynomene $P_1(x), \dots, P_4(x)$ av grad $1-4$ til funksjonen $f(x) = \ln(x)$ ved 1.
b) Beregn $P_1(2), \dots, P_4(2)$ og beregn hvor gode tilnærminger disse verdiene gir til $f(2) = \ln(2)$.

Oppgave 5 Vi har en funksjon $f(x)$ med $f(50) = 100$, $f'(50) = 1$ og $f''(50) = -0{,}4$.
a) Bestem Taylorpolynomet $P_2(x)$ til $f(x)$ ved 50.
b) Bruk $P_2(x)$ til å gi en tilnærmet verdi for $f(52)$.

Oppgave 6 La $P_1(x), \dots, P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 3. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_1(x)}{x^2} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_2(x)}{x^3} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - P_3(x)}{x^4}$$

Oppgave 7 La $P_1(x), \dots, P_4(x)$ være Taylorpolynomene i oppgave 4. Beregn grenseverdiene.

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-P_1(x)}{(x-1)^2} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-P_2(x)}{(x-1)^3} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)-P_3(x)}{(x-1)^4}$$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)
Vi betrakter priselastisiteten $\varepsilon = \varepsilon(p)$ for etterspørselsfunksjonen av en vare gitt ved $D(p) = 120 - 8p$. Da er:

(A) $\varepsilon > -1$ for $p = 7{,}5$
(B) $\varepsilon > -1$ for $p < 7{,}5$
(C) $\varepsilon > -1$ for $p > 7{,}5$
(D) $\varepsilon > -1$ for alle verdier av p
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)
Etterspørsel etter en vare er gitt ved $D(p) = 110 - 5p$. Da er elastisiteten $\varepsilon(p) = -1$ for:

(A) $p = 7$
(B) $p = 11$
(C) $p = \frac{16}{5}$
(D) $p = 22$
(E) Jeg velger å ikke besvare denne oppgaven.

Oppgave 10 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 3)
La p være prisen på en vare med etterspørselsfunksjon $D(p) = 100e^{-0{,}2p}$. Bestem hvilke priser p som gjør at etterpørselen er elastisk, uelastisk og nøytralelastisk.

Oppgave 11 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 10)
Funksjonen $f(x)$ har $f(30) = 700$, $f'(30) = 5$ og $f''(30) = -1$. Beregn en tilnærmet verdi til $f(31)$.

Fasit

Oppgave 1

a) relativ prisendring er $\frac{0,5}{30}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-1}{40}$ og priselastisiteten er $-1,5$, dvs elastisk

b) relativ prisendring er $\frac{1}{20}$, relativ etterspørselsendring er $\frac{-0,05}{101}$ og priselastisiteten er $-0,0099$, dvs uelastisk

c) relativ prisendring er 0,001, relativ etterspørselsendring er $-0,001014$ og priselastisiteten er $-1,014$, dvs elastisk

Oppgave 2

a) $\varepsilon(p) = \frac{-2p}{100-2p}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 25$, uelastisk for $0 < p < 25$ og elastisk for $25 < p < 50$.

b) $\varepsilon(p) = -\frac{1}{5p+1}$. Etterspørselsfunksjonen er uelastisk for alle $p \geqslant 1$.

c) $\varepsilon(p) = -0,1p$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 10$, uelastisk for $0 < p < 10$ og elastisk for $p > 10$.

d) $\varepsilon(p) = -\frac{18}{p^2+9}$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 3$, elastisk for $1 \leqslant p < 3$ og uelastisk for $p > 3$.

e) $\varepsilon(p) = -0,04p^2$. Etterspørselsfunksjonen er nøytralelastisk for $p = 5$, uelastisk for $0 < p < 5$ og elastisk for $p > 5$.

Oppgave 3

a) $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

b) $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 2,5$, $P_3(1) = \frac{8}{3} \approx 2,67$, $P_4(x) = \frac{65}{24} \approx 2,71$. Avstanden fra $f(1) = e$ er (tilnærmet):

$|f(1) - P_1(1)| = |e - 2| = 0,72$
$|f(1) - P_2(1)| = |e - 2,5| = 0,22$
$|f(1) - P_3(1)| = |e - \frac{8}{3}| = 0,052$
$|f(1) - P_4(1)| = |e - \frac{65}{24}| = 0,0099$

Oppgave 4

a) $P_1(x) = (x-1)$, $P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$, $P_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}$, $P_4(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$

b) $P_1(2) = 1$, $P_2(2) = \frac{1}{2}$, $P_3(2) = \frac{5}{6} \approx 0,83$, $P_4(2) = \frac{7}{12} \approx 0.58$. Avstanden fra $f(2) = \ln(2)$ er (tilnærmet):

$|f(2) - P_1(2)| = |\ln(2) - 1| = 0,31$
$|f(2) - P_2(2)| = |\ln(2) - \frac{1}{2}| = 0,19$
$|f(2) - P_3(2)| = |\ln(2) - \frac{5}{6}| = 0,14$
$|f(2) - P_4(2)| = |\ln(2) - \frac{7}{12}| = 0,11$

Oppgave 5

a) $P_2(x) = 100 + (x-50) - 0.2(x-50)^2$

b) $f(52) \approx P_2(52) = 101.2$

Oppgave 6

a) Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$-uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \quad \left(= \frac{f''(0)}{2} \right)$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2})}{x^3} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{3x^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6} \quad \left(= \frac{f'''(0)}{3!} \right)$$

c) $\frac{1}{24}$ $\left(= \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\right)$

Oppgave 7

a) Dette er et $\frac{0}{0}$-uttrykk. Kan derfor bruke l'Hôpitals regel. Deriverer teller og nevner. Får et nytt $\frac{0}{0}$-uttrykk og bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \left(= \frac{f''(1)}{2}\right)$$

b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)-[(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}]}{(x-1)^3} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-[1-(x-1)]}{3(x-1)^2} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}+1}{6(x-1)} \overset{\text{l'Hôp}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x^3}}{6} = \frac{1}{3} \qquad \left(= \frac{f'''(1)}{3!}\right)$$

c) $-\frac{1}{4}$ $\left(= \frac{f^{(4)}(1)}{4!}\right)$

Oppgave 8 (Flervalgseksamen 2017v, oppg 12)
B

Oppgave 9 (Flervalgseksamen 2016h, oppg 12)
B

Oppgave 10 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 3)

$$\varepsilon(p) = -0{,}2p$$

Etterspørselen er *elastisk* for $p > 5$.
Etterspørselen er *uelastisk* for $0 < p < 5$.
Etterspørselen er *nøytralelastisk* for $p = 5$.

Oppgave 11 (Hjemmeksamen MET11805 2020h, oppg 10)
Taylorpolynomet av andre grad til $f(x)$ i 30 er $P_2(x) = 700 + 5(x-30) - 0{,}5(x-30)^2$. Dermed er $f(31) \approx P_2(31) = 704{,}5$.