MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 30
Kap 5.6-7: Bestemte integral som areal. Økonomiske anvendelser.

Lærebokoppgaver

[L] 5.6: 3-5
[L] 5.7: 1-2

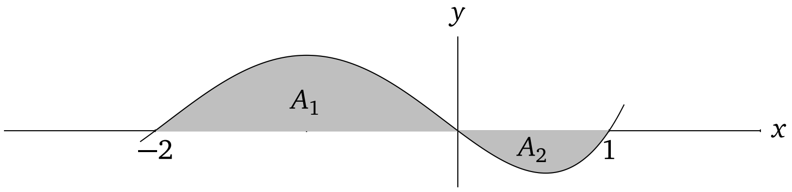
Oppgaver for veiledningstimene torsdag 25/1 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Et glass har høyde $H = 10$, og er formet slik at det horisontale tverrsnittet i høyde h er en sirkel med radius $r = 0.10h^2$ når $0 \leq h \leq H = 10$. Lag en figur som viser glasset sett fra siden, og regn ut volumet som glasset rommer. Høyden H og radius r er oppgitt i cm.

Oppgave 2.
Lag figur som viser det bestemte integralet som et areal. Bestem arealet ved integrasjon og ved å bruke figuren.

a) $\displaystyle\int_0^4 3 \, dx$ b) $\displaystyle\int_0^8 (10+3x) \, dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x| \, dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^3 x - |x| \, dx$

Oppgave 3.
Grafen til en funksjon f er vist i figuren nedenfor. Bestem arealet A_1 når arealet $A_2 = 22/15$ og $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x) \, dx = \frac{18}{5}$.



Oppgave 4.
Finn arealet til området R, og vis R på figur:

a) R er området begrenset av grafen til $y = \ln(2+x)$, linjen $y = 2$, og y-aksen.

b) R er området begrenset av grafene til $y = x$ og $y = x^2$.

Oppgave 5.
Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntekststrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{t/7}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter t år. Regn ut den samlede inntekten i løpet av de neste 10 årene. Hvor mye av denne inntektsstrømmen kommer i løpet av de første to årene?

Oppgave 6.
Et eiendomsselskap har en inntektstrøm fra sine leietager som for tiden er 300 millioner kroner per år. Vi antar at inntekststrømmen vil øke i årene som kommer, og velger den kontinuerlige funksjonen

$$f(t) = 300 \cdot e^{t/7}$$

som modell for inntektsraten (i millioner kr per år) etter t år. Regn ut nåverdien av inntektsstrømmen i løpet av de neste 10 årene når vi bruker kontinuerlig forrentning og diskonteringsrente $r = 10\%$. Hvor stor del av denne nåverdien stammer fra leien i løpet av de første to årene?

Oppgave 7.
Den (omvendte) etterspørselsfunksjonen $p = f(q)$ og den (omvendte) tilbudsfunksjonen $p = g(q)$ er gitt ved

$$f(q) = 200 - 2q \quad \text{og} \quad g(q) = q + 20$$

Finn likevektsprisen. Beregn konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet, og vis på figur.

Oppgave 8.
Den (omvendte) etterspørselsfunksjonen $p = f(q)$ og den (omvendte) tilbudsfunksjonen $p = g(q)$ er gitt ved

$$f(q) = \frac{6000}{q+50} \quad \text{og} \quad g(q) = q + 10$$

Finn likevektsprisen. Beregn konsumentoverskuddet og produsentoverskuddet, og vis på figur.

Oppgave 9.
Skriv ned en sum (basert på minst $n = 10$ delintervaller) som tilnærmer det bestemte integralet $\int_0^1 (1 - x^2)\,dx$, og vis det bestemte integralet og tilnærmingen som arealer i en figur.

Oppgave 10.
Bestem arealet under grafen til $y = 1/x$ i intervallet $I = [1\,,2]$, og bruk dette til å vise at

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right) = \ln(2)$$

Fasit

Oppgave 1.
$200\pi \approx 628$ (eller 0.63 liter)

Oppgave 2.

a) 12 b) 176 c) 4 d) 1

Oppgave 3.
$A_1 = 76/15$

Oppgave 4.

a) $e^2 - 6 + \ln(4)$ b) $1/6$

Oppgave 5.
Samlet inntekt er $2100(e^{10/7} - 1) \approx 6\,663$ millioner kr. Av dette stammer $2100(e^{2/7} - 1) \approx 694$ millioner kr fra leie de første to årene.

Oppgave 6.
Nåverdi er $7000(e^{3/7} - 1) \approx 3\,745$ millioner kr. Av dette stammer $7000(e^{3/35} - 1) \approx 626$ millioner kr fra leie de første to årene.

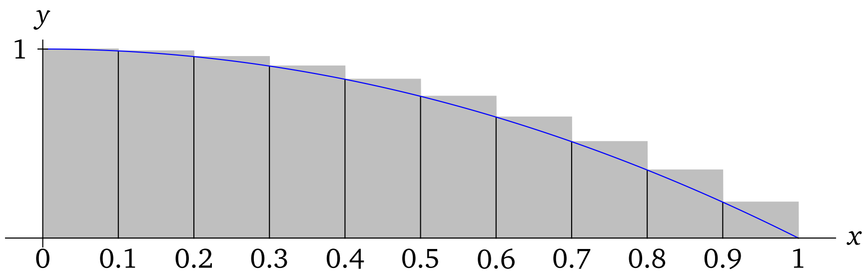
Oppgave 7.
Likevektsprisen $p^* = 80$, konsumentoverskuddet er $3\,600$ og produsentoverskuddet er $1\,800$.

Oppgave 8.
Likevektsprisen $p^* = 60$, konsumentoverskuddet er $6000\ln(2) - 3000 \approx 1159$ og produsentoverskuddet er 1250.

Oppgave 9.
Hvis vi deler intervallet $[0,1]$ inn i $n = 10$ like store delintervall, så blir delepunktene $x_i = i/10$ for $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Det vil si at $x_0 = 0$, $x_1 = 1/10$, $x_2 = 2/10$ og så videre. Det bestemte integralet er arealet under $f(x) = 1 - x^2$ på intervallet $[0,1]$. Vi kan tilnærme dette som arealet av ti rektangler, gitt ved summen

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{9} f(x_i)\cdot\Delta x_i &= \sum_{i=0}^{9}\left(1-(i/10)^2\right)\cdot\frac{1}{10} = (1+(1-1/100)+(1-4/100)+\cdots+(1-81/100))\cdot\frac{1}{10}\\ &= \frac{1}{10}\cdot\left(10-\frac{0+1+4+\cdots+81}{100}\right) = 0.715\end{aligned}$$

Summen er vist i figuren nedenfor. Det bestemte integralet er arealet under den blå kurven, altså litt mindre enn 0.715. Valget $n = 10$ er ikke viktig, men tilnærmingen blir bedre jo større n er.



Oppgave 10.
Arealet er ln(2), og Riemann-summen for dette arealet med n delintervaller er

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+1/n}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n-1)/n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

Grenseverdien til denne summen når $n \to \infty$ er derfor lik arealet ln(2).