MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

> *... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.*
>
> R. Lucas

Forelesning 34
Kap 6.4: Determinanter og lineære system. Cramers regel.

Lærebokoppgaver

[L] 6.3: 1-7
[L] 6.4: 1-7

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 8/2 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

Oppgave 2.
Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$

Oppgave 3.
Regn ut determinantene, og avgjør når determinantene er null:

a) $\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 1 & 7 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 3 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Oppgave 4.
Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

Oppgave 5.
Når $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ og $B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, kan vi tenke på matrisen

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

som en *blokk-matrise* og skrive $X = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, hvor hver av de fire blokkene er en 2×2-matrise.

a) Regn ut $|X|$

b) Vis at $|X| = |A| \cdot |B|$

c) Finn $\left|\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right|$ når C er en 2×2-matrise med $|C| = 4$

Oppgave 6.
Vi starter med en kvadratisk matrise A, og kommer fram til en ny matrise B ved å gjøre en elementær radoperasjon. Er det alltid slik at $|A| = |B|$? Begrunn hvorfor/hvorfor ikke, og gi eksempler.

Oppgave 7.
Bestem når systemet har eksakt én løsning, og bruk Cramers regel til å finne løsningene i disse tilfellene:

$$a)\begin{array}{lrcrcl} ① & x & + & ay & = & 3 \\ ② & ax & + & 4y & = & 1 \end{array} \qquad b)\begin{array}{lrcrcl} ① & ax & + & y & = & 1 \\ ② & -x & + & ay & = & 2 \end{array}$$

Oppgave 8.
Et lineært system kalles *homogent* dersom alle konstantleddene er null. Hvor mange løsninger har et homogent lineært system med tre likninger og fem ukjente?

Oppgave 9.
Avgjør hvor mange løsninger de lineære systemene har for ulike verdier av parameteren a.

$$a)\begin{array}{lrcrcrcl} ① & x & + & 3y & + & az & = & 0 \\ ② & 2x & - & ay & + & 3z & = & 0 \\ ③ & 3x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \qquad b)\begin{array}{lrcrcrcr} ① & 2x & + & ay & - & z & = & a-5 \\ ② & -x & + & 2y & + & az & = & -3 \\ ③ & ax & - & y & + & 2z & = & a+10 \end{array}$$

Oppgave 10.
Eksamen MET1180 (Juni 2016) Oppgave 1abd
Vi betrakter det lineære likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & 3 & 3 \\ 3 & 2-a & 3 \\ 3 & 3 & 2-a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ a+4 \\ 1-2a \end{pmatrix}$$

Vi betrakter a som en parameter og x, y, z som variabler.

a) Løs det lineære systemet når $a = 8$. Hvor mange frihetsgrader har systemet?

b) Regn ut $|A|$ for en vilkårlig verdi av a.

c) For hvilke verdier av a har det lineære systemet eksakt én løsning? Finn x i disse tilfellene.

Fasit

Oppgave 1.

a) 2 b) -2 c) 2 d) -2 e) 0 f) $ac-b^2$

Oppgave 2.

a) 2 b) 2 c) 0 d) 6 e) $(1-a)(1-b)(b-a)$

Oppgave 3.

a) Determinant $16-a^2$, den er null for $a=\pm 4$

b) Determinant $-a^2+2a+7$, den er null for $a=1\pm\sqrt{8}$

c) Determinant $2a^2(1-a)$, den er null for $a=0$ og $a=1$

d) Determinant $4-2a$, den er null for $a=2$

e) Determinant $(a-1)^2(a+2)$, den er null for $a=1$ og $a=-2$

Oppgave 4.

a) 4 b) -10 c) -12

Oppgave 5.

a) 10 b) $10=(-10)\cdot(-1)$ c) -40

Oppgave 6.

Hvis vi kan komme fra A til B ved å legge til et multippel av en rad til en annen rad, så er $|A|=|B|$. Hvis vi bytter om to rader, så er $|B|=-|A|$. Hvis vi multipliserer en rad med $c\neq 0$, så er $|B|=c\cdot|A|$.

Oppgave 7.

$a)\ (x,y)=\left(\frac{12-a}{4-a^2},\frac{1-3a}{4-a^2}\right)$ for $a\neq\pm 2$ $b)\ (x,y)=\left(\frac{a-2}{a^2+1},\frac{2a+1}{a^2+1}\right)$ for alle a

Oppgave 8.

Uendelig mange løsninger (med minst to frihetsgrader).

Oppgave 9.

a) Uendelig mange løsninger for $a=\pm 1$, én løsning for $a\neq\pm 1$
b) Uendelig mange løsninger for $a=-1$, én løsning for $a\neq -1$

Oppgave 10.

a) $(x,y,z)=(t-2,t-3,t)$, én frihetsgrad (t er en fri parameter)

b) $-a^3+6a^2+15a+8=-(a+1)^2(a-8)$ c) $a\neq 8,-1$, $x=0$