MET1180 Matematikk for siviløkonomer
Vår 2024
Oppgaver

... if I couldn't formulate a problem in economic theory mathematically, I didn't know what I was doing. I came to the position that mathematical analysis is not one of the many ways of doing economic theory: it is the only way.

R. Lucas

Forelesning 38
Kap 6.6: Inverse matriser

Lærebokoppgaver

[L] Kap. 6.6: 1-6

Oppgaver for veiledningstimene torsdag 22/2 fra 12 i D1-065/70

Oppgave 1.
Finn A^{-1}, dersom det er mulig:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
f) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 2.
Bestem de verdiene av a som er slik at den inverse matrisen til A eksisterer, og regn ut A^{-1} i disse tilfellene:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$
b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Oppgave 3.
Vi ser på det lineære systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

a) Løs systemet når $t = 2$.
b) Avgjør hvor mange løsninger systemet har for ulike verdier av t.
c) Finn den inverse matrisen A^{-1} når den eksisterer, og bruk dette til å løse systemet i disse tilfellene.

Oppgave 4.
Skriv uttrykkene enklest mulig:

a) $(A+B)^2$
b) $(A^T A)^T$
c) $A(3B-C)+(A-2B)C+2B(C+2A)$
d) $A^{-1}(BA)$
e) $(BAB^{-1})^2 \cdot B^2$
f) $(A-B)(C-A)+(C-B)(A-C)+(C-A)^2$

Oppgave 5.
Anta at A og B er (3×3)-matriser med $|A| = 2$ og $|B| = -5$. Regn ut:

a) $\det(AB)$
b) $\det(3A)$
c) $\det(-2B^T)$
d) $\det(2A^{-1}B)$

Oppgave 6.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ med parameter a, gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 4 \\ 2a & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 16 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ 40 \\ 51 \end{bmatrix}$$

a) Bruk Gauss-eliminasjon til å løse det lineære systemet når $a = 2$. Marker pivot-posisjonene.

b) Regn ut $\det(A)$, og bestem alle verdier av a slik at $\det(A) = 0$.

c) Finn A^{-1} når $a = 3$.

d) Vis at $A^7 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har eksakt én løsning for $a = -1$, og uttrykk løsningen $\mathbf{x}$ ved A og $\mathbf{b}$.

Oppgave 7.
Vi betrakter det lineære systemet $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, hvor

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 3-a \end{bmatrix}$$

og a er en parameter.

a) Løs det lineære systemet når $a = 1$.

b) Finn determinanten $\det(A)$, og bestem verdiene av a slik at $\det(A) = 0$.

c) Bestem alle verdier av a slik at $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger.

d) Regn ut $A^2 - 3A$ når $a = 1$.

Fasit

Oppgave 1.

a) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

c) A^{-1} ikke definert

d) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

f) A^{-1} ikke definert

Oppgave 2.

a) $A^{-1} = \frac{1}{1-a^2}\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ for $a \neq -1, 1$

b) $A^{-1} = \frac{1}{6a}\begin{bmatrix} 2a & -2 & 1-a^2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3a \end{bmatrix}$ for $a \neq 0$

c) $A^{-1} = \frac{1}{(1-a)(1+3a)}\begin{bmatrix} 2 & a-1 & 1-3a \\ a-1 & 1-a^2 & a-1 \\ 1-3a & a-1 & 2 \end{bmatrix}$ for $a \neq -1/3, 1$

Oppgave 3.

a) $(x,y,z) = (2/3,0,2/3)$

b) Uendelig mange løsninger for $t = 0$ og $t = 1$, ingen løsninger for $t = -1$, og én løsning for $t \neq -1,0,1$

c) $A^{-1} = \frac{1}{t(t^2-1)}\begin{bmatrix} t^2 & 0 & -t \\ 0 & t^2-1 & 0 \\ -t & 0 & t^2 \end{bmatrix}$ for $t \neq -1,0,1$, løsningene er $(x,y,z) = \left(\frac{t}{t+1}, 0, \frac{t}{t+1}\right)$ for $t \neq -1,0,1$

Oppgave 4.

a) $A^2 + AB + BA + B^2$

b) $A^T A$

c) $3AB + 4BA$

d) $A^{-1}BA$

e) BA^2B

f) 0

Oppgave 5.

a) -10

b) 54

c) 40

d) -20

Oppgave 6.

a) $(7-2y, y, 1)$ der y er fri

b) $-32a^2 + 140a - 152$, $a = 2$ eller $a = 19/8$

c) $\frac{1}{20}\begin{bmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 36 & 4 & -12 \\ -20 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

d) $(A^{-1})^7 \cdot \mathbf{b}$

Oppgave 7.

a) $(x,y,z) = (2,0,-1)$

b) $|A| = -a(2a+3)$, og $|A| = 0$ for $a = 0$ og $a = -3/2$

c) $a = 0$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{bmatrix}$